黎曼猜想：
证明、谱与它背后的数学世界

—— 从乘法身份、广义黎曼猜想到 Hilbert–Pólya 与 GUE

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$



$$\rho=\frac{1}{2}+i\gamma$$

广义黎曼猜想

乘法身份

谱与算子
(Hilbert–Pólya)

素数

欧拉/
狄利克雷

$\zeta(s)$

$\xi(s)$

$\rho=\frac{1}{2}+i\gamma$

GUE
（随机矩阵）

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T)$$



任毅飞

独立研究者

没有零点

只有心跳

《黎曼猜想：证明、谱与它的数学世界》

——从乘法身份、广义黎曼猜想到 Hilbert–Pólya 与 GUE

作者　任毅飞

作者身份　独立研究者

发布时间　2026 年 11 月 12 日

电子邮箱　zentiger@qq.com

ORCID　0009-0009-1373-9609

微信　ryfweixin

GitHub（本书交互教学网页和软件）　https://github.com/qiaoranjushi/ghtmath

强烈推荐互动课堂　https://qiaoranjushi.github.io/ghtmath/

本书 DOI　10.5281/zenodo.23864108

本书目前为预印本，尚未与出版社签约。如您认为本书有出版价值，欢迎联系探讨合作。

本人为独立研究者，若您愿意资助我的研究工作，也同样感激不尽。

arXiv 背书请求　我目前正在寻求 arXiv math.NT（Number Theory，数论）板块的投稿背书。如果您具备该板块的背书资格，并愿意支持我的投稿，欢迎访问以下链接：

https://arxiv.org/auth/endorse?x=X4R44M

感谢您的时间与帮助。

思想来源　本书底层思想源自《数学的地基：GHT 生成履历理论概论》

Foundations of Mathematics: An Introduction to Generative History Theory (GHT)

https://doi.org/10.5281/zenodo.23662772

版权与许可　© 2026 任毅飞。

除另有注明外，本书采用 **知识共享署名—非商业性使用 4.0 国际许可协议（CC BY-NC 4.0）** 授权。任何人在遵守署名与非商业性使用条件的前提下，可以复制、传播、展示、改编和再创作本书内容；涉及第三方材料或另有版权说明的内容，则以相应标注为准。

作者说明

我仍是一名数学初学者，也才刚刚开始对这些问题进行系统探索。

本书记录的是我在当前阶段对黎曼猜想、广义黎曼猜想、Hilbert–Pólya 谱路线及相关数学结构的理解、证明与整理，而不是一个拒绝修改的终点。受限于知识积累、研究经验与表达能力，书中仍可能存在定义不够凝练、论证尚可加强、术语或形式化处理有待校正之处，也可能存在我目前尚未意识到的错误。

数学之所以值得长期投入，正在于它允许公开检验、独立复核、批评、修正与不断重建。因此，我欢迎读者对本书的定义、定理、证明链和跨章依赖进行逐项核对；如果发现错误，希望能够明确指出具体位置、所缺条件或反例，使问题能够在可检验的数学层面得到修正。

同时，这一说明不用于削弱正文已经明确陈述的数学结论。本书对黎曼猜想、广义黎曼猜想以及独立 Hilbert–Pólya 源生成谱路线的证明主张，均由正文中的定义、定理与证明承担责任。作者身份、经历与自我评价既不能替代证明，也不应替代对证明本身的判断。

我所希望的是：读者不必相信作者，也能够把这条证明道路重新走一遍。

目　　录

前言　从 1859 年的问题到身份与谱的双重闭合 1
第一章　开放乘法关系、解析身份保真与黎曼猜想的互反零点事件闭合 23
第二章　Riemann 零点间隔的视界形状几何 63
第三章　Riemann 零点的身份地址与解析重数 85
第四章　Riemann 闭合核的参数化与广义黎曼猜想的证明 102
第五章　黎曼猜想闭合后的保真事件谱图 139
第六章　RH 任毅飞算子：乘法身份、解析延拓与规范谱之间的无损桥梁 164
第七章　Riemann 谱见证定理：任毅飞规范谱见证的唯一性与 Hilbert–Pólya 身份传递 202
第八章　从 Riemann 谱见证到 GUE 230
第九章　黎曼猜想的另一条闭合路径：开放乘法身份与 Hilbert–Pólya 独立谱路线 278
后记 317
第一部　看见本来：问题如何被制造，又如何重新变得可见 319
第二部　当身份重新显现：证明如何从解释进入数学 326
第三部　证明之后：公共检验、历史与继续生长的数学 330
感谢 336
参考文献 339

前言　从 1859 年的问题到身份与谱的双重闭合

一　一个只有一句话的猜想，为什么走过了一百六十多年

黎曼猜想的标准陈述极其简洁。

设 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta 函数，ρ 遍历它的非平凡零点。猜想断言：

$$\Re\rho = \frac{1}{2} \qquad \text{对每一个非平凡零点}\rho.$$

一句话，一个实部，一个固定值。

然而，从 1859 年到今天，这句话已经吸引了几代数学家，催生了复分析、解析数论、谱理论、调和分析、算子理论、概率模型、随机矩阵、几何类比和大规模数值计算之间极其罕见的长期汇流。它既是 Hilbert 1900 年第二十三个问题体系中的第八问题的一部分，也是 Clay Mathematics Institute 于 2000 年列出的七个千禧难题之一。[2][7]

如果只看命题长度，几乎无法理解它的历史重量。

真正使黎曼猜想成为黎曼猜想的，不只是“所有零点是否落在一条直线上”。更深的原因是：它处在整数乘法结构、素数分布、复分析延拓、函数方程、零点谱、显式公式和可能存在的自伴谱结构的交汇处。它像一个极小的接口，却连接着一个极大的数学世界。

本书正是在这个接口上展开。

但这本书的出发点，不是“过去的方法都走错了”，也不是“再寻找一种比所有既有方法更强的技巧”。

相反，本书首先承认一个事实：

> **围绕黎曼猜想形成的一百六十多年数学，没有白走。**

没有 Euler 乘积，便没有素数乘法结构与 zeta 的第一座桥；没有 Riemann 的解析延拓、函数方程和显式思想，便没有后来关于零点的整个世界；没有 Hadamard 与 de la Vallée Poussin，便没有 1896 年素数定理的解析证明；没有 Hardy、Selberg、Levinson、Conrey 等人对临界线零点的持续推进，我们不会知道临界线到底在多大程度上已经被严格触及；没有 Turing、Odlyzko 及后来的计算传统，我们不会拥有如此强的有限高度证据；没有 Weil、Nyman–Beurling、Li 等等价与正性判据，我们不会知道 黎曼猜想 可以被翻译成多少种成熟数学语言；没有 Hilbert–Pólya 的长期想象、de Branges、Connes、Berry–Keating、Suzuki 等谱路线，就不会有“零点是否本来就是某个自伴谱”的深层追问；没有 Montgomery、Dyson、Odlyzko、Katz–Sarnak 等工作，zeta 零点与 GUE/CUE 之间令人震惊的二阶关系也不会成为今天的数学景观。[5][8]–[42]

本书不是站在这些工作之外。

它正是站在它们已经铺出的道路上，重新问一个更基础的问题：

当数学表示不断变换时，被表示对象的身份是否也真的发生了变化？

这不是一句哲学口号。

它将直接决定：一个新的坐标究竟代表新的独立信息，还是同一个对象在另一种成熟表示中的读数；一项新的证明义务究竟来自对象本身，还是来自我们对对象的切分；一个看似新的“最后缺口”，究竟真的减少了证明信息，还是只是把同一笔债务搬到了另一种语言中。

这就是本书与传统 黎曼猜想文献最不同的切入点。

二　从 Euler 到 Riemann：素数第一次进入复变量世界

Riemann 的工作并不是从真空中出现。

十八世纪，Euler 已经把

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

与素数乘积

$$\zeta(s) = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}, \qquad \Re s > 1,$$

联系起来。[1][5]

这条 Euler 乘积是解析数论最伟大的起点之一。它把两个看似完全不同的对象压到同一个函数中：

全部正整数的 Dirichlet 读取　＝　素数乘法基元的 Euler 重构.

因此，zeta 从一开始就不只是一个复函数。

它携带的是自然数乘法结构。

十九世纪初，Gauss 与 Legendre 从数值观察中逐渐看见素数的宏观密度轮廓。素数计数函数

$$\pi(x) = \#\{p \le x : p \text{ 为素数}\}$$

似乎满足

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

1859 年，Riemann 在篇幅极短却影响极深的论文 *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* 中，把这一问题送入复平面。[2] 他不再只研究 $\pi(x)$ 本身，而是研究 zeta 的解析延拓、函数方程及其零点，并由此把素数分布与复零点建立精确联系。

这一步改变了数论的方向。

素数不再只是整数轴上的离散对象。

它们开始拥有一个“频谱式”的影子。

Riemann 的完成函数可以写成

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

满足互补对称

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

非平凡零点落在临界带

$$0 < \Re s < 1,$$

而 Riemann 提出的猜想正是：

$$\boxed{\Re\rho = \frac{1}{2}.}$$

从那一刻起，素数问题出现了一个新的中心：

> 为什么所有非平凡零点都应当落在临界线？

三　1896：黎曼的方法先完成了素数定理，却把更深的问题留了下来

Riemann 没有证明自己的猜想。

但他的思想很快显示出力量。

1896 年，Hadamard 与 de la Vallée Poussin 独立证明 zeta 在直线

$$\Re s = 1$$

上没有零点，由此证明素数定理：

$$\boxed{\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.}$$

Hadamard 的论文直接研究 zeta 零点的分布及其算术后果；de la Vallée Poussin 的分析则把零点自由区域与素数渐近紧密连接。[3][4]

这一历史节点极其重要。

它表明：即使没有 黎曼猜想，Riemann 的复分析框架已经足以解决一个此前最重要的素数分布问题。

但与此同时，黎曼猜想 的意义也因此变得更加清楚。

素数定理给出的是平均轮廓。

黎曼猜想 控制的则是偏离平均轮廓的尺度。[7]

换句话说，PNT 与 黎曼猜想 的差别，不只是“一个已证、一个未证”。

它们代表两种不同的信息层：

平均分布　与　围绕平均分布的精细波动.

这也解释了为什么 黎曼猜想 会逐渐成为解析数论的中心问题之一。

四　从 Hardy 到 Conrey：临界线不是猜想中的空白地带

二十世纪的一个重要方向，是不断证明“有多少零点确实在临界线上”。

1914 年，Hardy 证明临界线

$$\Re s = \frac{1}{2}$$

上存在无穷多个零点。[9]

这一步意义重大。它说明临界线不是一个仅由对称性指定、却没有零点真正到达的形式中心。

随后，Hardy–Littlewood、Selberg 等人继续推动临界线零点计数。1942 年，Selberg 证明有正比例的非平凡零点位于临界线上。1974 年，Levinson 将比例推进到至少三分之一。[10] 1989 年，Conrey 证明超过五分之二的零点位于临界线上，并在相应意义下具有简单性。[11]

这些结果不断扩大“已经在临界线上的部分”。

但它们也清楚地暴露 黎曼猜想 的全称性质：

无穷多个 ≠ 正比例 ≠ 超过 40% ≠ 100%.

黎曼猜想 要求的不是“临界线上有很多零点”。

它要求：

一个也不能离开。

从方法论上看，这一点非常值得注意。许多数学工具擅长控制平均、比例、密度和大集合；而 黎曼猜想 要求的是一个没有例外的全称命题。

因此，一百多年来，数学不仅在寻找更强的估计，也一直在寻找一种能够把“局部逐点”与“整体结构”真正锁死的机制。

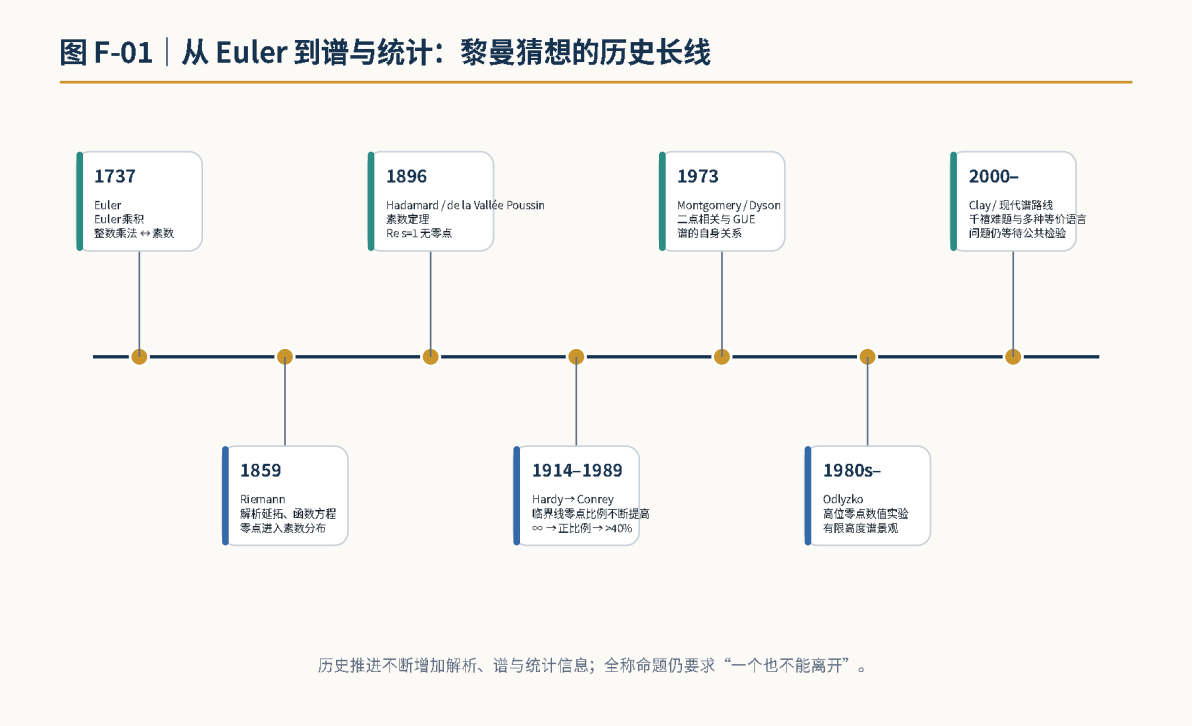


图 F-01　从 Euler 到谱与统计：黎曼猜想的历史长线。 从 Euler 乘积、Riemann 的复分析框架，到临界线研究、Montgomery–Dyson 的二点相关与 Odlyzko 的高位零点计算，历史不断增加解析、谱与统计层面的信息；但黎曼猜想的全称命题始终要求“一个也不能离开”。

五　计算、等价判据与正性路线：同一个问题不断获得新的照片

另一条重要历史线索，是把 黎曼猜想 转换成其他数学问题。

Turing 建立了系统核对 zeta 零点的办法，使有限高度零点验证能够具有严格的计数完整性。[12] Booker 等工作进一步发展并整理了这一传统。[13] Odlyzko 的高位零点计算则使人们第一次能够在极高区域观察零点间隔的统计结构。[14]

但有限计算始终只能回答：

> 在已经检查的范围内，是否发现反例？

它不能把有限高度自动变成全称无穷结论。

与此同时，黎曼猜想 获得了大量等价形式。

Weil 把显式公式与正性条件联系起来。[15] Nyman 与 Beurling 把 黎曼猜想 转换为某些函数子空间在 L^2 或 L^p 中的稠密性问题。[16][17] Li 则把 黎曼猜想 转换为一列系数的非负性。[18]

这些等价判据具有巨大的数学价值。

它们告诉我们：

> 黎曼猜想 并不只生活在零点坐标里。

它可以被写成正性问题、逼近问题、函数空间问题、算术相消问题、谱问题。

但等价形式同时带来一个长期存在的困难：

$$A \Leftrightarrow B$$

并不自动意味着 B 比 A 更容易。

如果新的表示只是完整搬运原来的临界难点，那么我们获得的是新的坐标，而不是减少后的证明债务。

这正是本书所特别关注的地方。

几何类比：函数域告诉我们，“黎曼猜想型命题”确实可能来自更高层结构

黎曼猜想历史中还有一个不能忽略的方向：函数域上的类比。

在有限域上的代数曲线与更一般代数簇中，zeta 函数同样具有 Euler 乘积、函数方程与零点问题。Weil 把这些对象提升到代数几何与上同调的框架，后来 Deligne 完成 Weil 猜想中最深的“Riemann hypothesis”部分。[68][69]

这段历史给数域 黎曼猜想 留下了极深的启示：

> 零点落在“正确的线”上，可能不是逐点估计的结果，而是某个更高层结构的谱/权重/正性后果。

但函数域的成功不能直接当作数域 黎曼猜想 的证明。

有限域中存在 Frobenius、étale cohomology 和纯性理论等数域情形并没有现成对应物的结构。真正困难的，正是找到数域世界中承担类似职责的对象。

因此，几何路线与 Hilbert–Pólya 路线虽然语言不同，却共享一个很深的愿望：

> 不要逐个把零点推向临界线；找到一个结构，使临界性成为必然读数。

本书对“身份”的梳理，与这一历史愿望处在同一个问题层级上：寻找一个比逐点坐标更高的结构来源。

六　Hilbert–Pólya：如果零点是自伴谱，1/2 将以完全不同的方式出现

黎曼猜想 最著名的结构性梦想之一，是 Hilbert–Pólya 思路。

它的基本直觉极其简洁。

如果存在一个自伴算子 H，其谱为实数 γ_n，而非平凡零点正好能够写成

$$\rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n,$$

那么 黎曼猜想 将由自伴性所保证的实谱结构自动出现。

这条路线之所以诱人，是因为它不再试图逐点估计

$$\Re\rho - \frac{1}{2},$$

而是希望找到一个更高层的结构，使“实部等于 $1/2$”成为谱表示的内生事实。

Pólya 与 Hilbert 的名字后来被共同附着在这一设想上；Odlyzko 保存的 Pólya 1982 年书信是这段思想史的重要文献之一。[20]

此后，谱方向产生了多条深刻路线。

de Branges 尝试通过整函数 Hilbert 空间与结构定理逼近 黎曼猜想。[19] Connes 从非交换几何和迹公式出发研究零点的谱解释。[23] Berry 与 Keating 从半经典量子动力学和

$$H_{\mathrm{cl}} = xp$$

出发探索零点计数与量子能级渐近之间的对应。[21][22] Suzuki 则从 canonical systems、screw functions、Weil 分布等方向持续推进 zeta 与 Hilbert 空间、谱结构之间的联系。[24]–[26]

这些路线建立了一个越来越清晰的历史共识：

> “存在一个谱”并不够；关键在于这个谱为什么正好是 Riemann 谱。

这也是本书第六、第七与第九章所正面处理的问题。

七　Montgomery、Dyson、Odlyzko：零点不仅像谱，还像量子混沌中的谱

1973 年，Montgomery 研究 zeta 零点的二点相关。[27]

著名的故事是，Montgomery 与 Dyson 的交流使人们意识到，他得到的二点相关形式与 GUE 大型随机矩阵的能级相关具有惊人的一致性。[28]

这不是一个孤立的巧合。

Odlyzko 后来的高位零点计算提供了极强的数值证据。[14] Rudnick–Sarnak、Katz–Sarnak、Bogomolny–Keating、Conrey–Snaith 等工作又从 L-函数族、随机矩阵、显式公式与 ratios 等不同方向深化这种对应。[30]–[35]

于是 黎曼猜想 周围出现了第二个谱问题：

第一问是：

> 零点纵坐标是不是某个自伴算子的谱？

第二问是：

> 这个谱的二阶和高阶统计为什么呈现 GUE/CUE 结构？

这两个问题必须分开。

自伴性是一阶谱问题。

GUE 是二阶及高阶自身关系问题。

第八章沿着这一分层展开：GUE 不负责决定黎曼猜想的横向位置，而是在一阶 Riemann 谱身份已经固定以后进入。

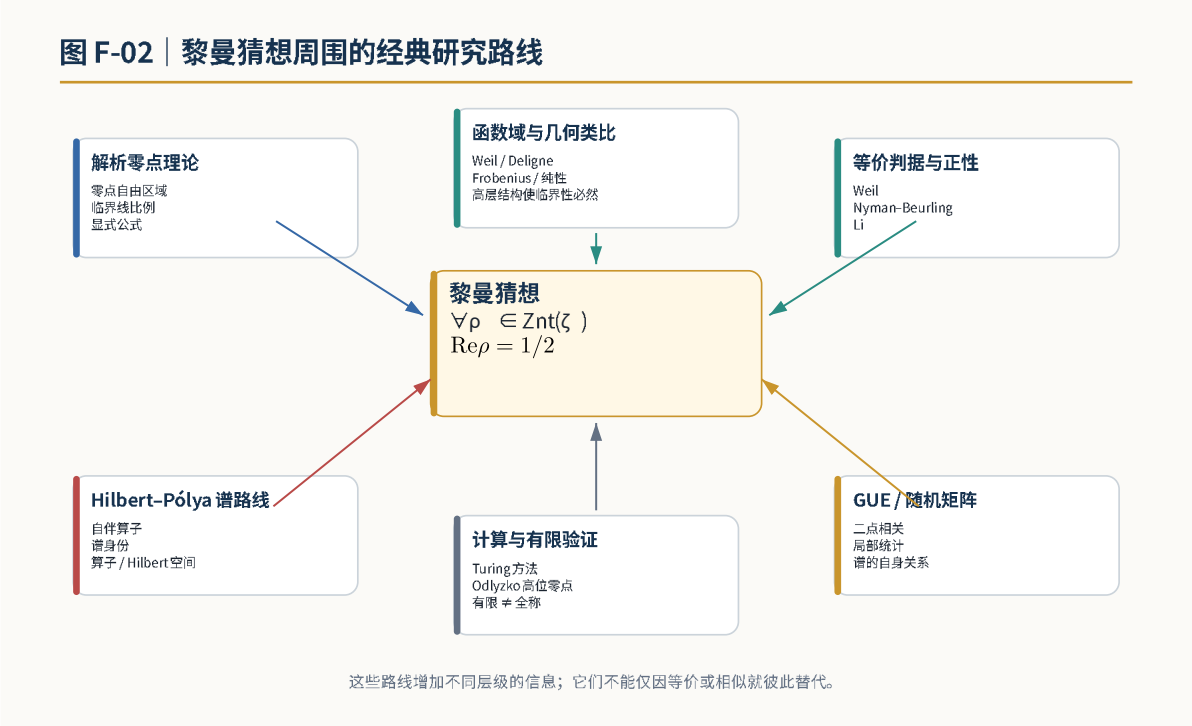


图 F-02　黎曼猜想周围的经典研究路线。 解析零点理论、等价与正性判据、函数域几何类比、Hilbert－Pólya、随机矩阵以及有限计算分别增加不同层级的信息。它们可以互相启发，但不能只因等价、相似或共享某些读数就彼此替代。

八　真正促成本书的，不是“再发明一条路线”，而是重新梳理身份

本书最初的推动力，其实来自一个很小的问题：

$$\boxed{\text{为什么偏偏是}\frac{1}{2}\text{？}}$$

如果只停留在函数方程

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

上，这个问题并不难回答一半。

1/2 是互补对合

$$s \mapsto 1-s$$

的固定中心。

但标准数学当然也完全清楚：

$$\boxed{\text{整体对称} \not\Rightarrow \text{每一个零点都是固定点.}}$$

因此，本书没有把“函数方程有中心 1/2”当作 黎曼猜想 的证明。

真正的问题被向前推进了一层：

> 零点的实部读数，究竟在何处获得了独立于原乘法身份的第二个自由度？

要回答这句话，就必须区分三个概念：

$$\boxed{\text{身份} \neq \text{角色} \neq \text{角色读数.}}$$

一个完整对象可以在不同表示中承担不同角色。

角色可以具有不同局部坐标。

但“能够被单独写出来”不等于“已经获得独立的生成来源”。

也正因为如此，我在这本书里保留了“对象化”和“证明债务”两个词。它们提醒我们：一个数学对象被切分、命名和重新表示以后，新的证明义务究竟来自对象本身，还是来自我们的切分方式。

数学对象化是一种伟大的能力。

我们把整体函数变成零点集合，把零点集合变成单个零点，把单个零点拆成实部与虚部，再对其中一个坐标施加全称量词。

每一步都合法。

但每一步也都可能产生新的证明义务。

因此需要追问：

> 这项证明义务，是对象本身带来的，还是切分之后新登记出来的？

本书把这种追问称为“证明债务核对”。

这里必须明确一条边界：

GHT、对象生成、回溯、证明债务等思想，是本书发现问题和组织问题的背景，不进入 黎曼猜想正文的数学证明链。

本书的数学主链最终只使用正文中明确给出的乘法关系、解析编码、互反角色、事件表示、Hilbert 空间、Stieltjes 重构、谱定理、Fredholm 结构、Fourier–Plancherel 等数学对象。

换句话说：

> 方法论可以帮助发现证明；证明本身必须独立站立。

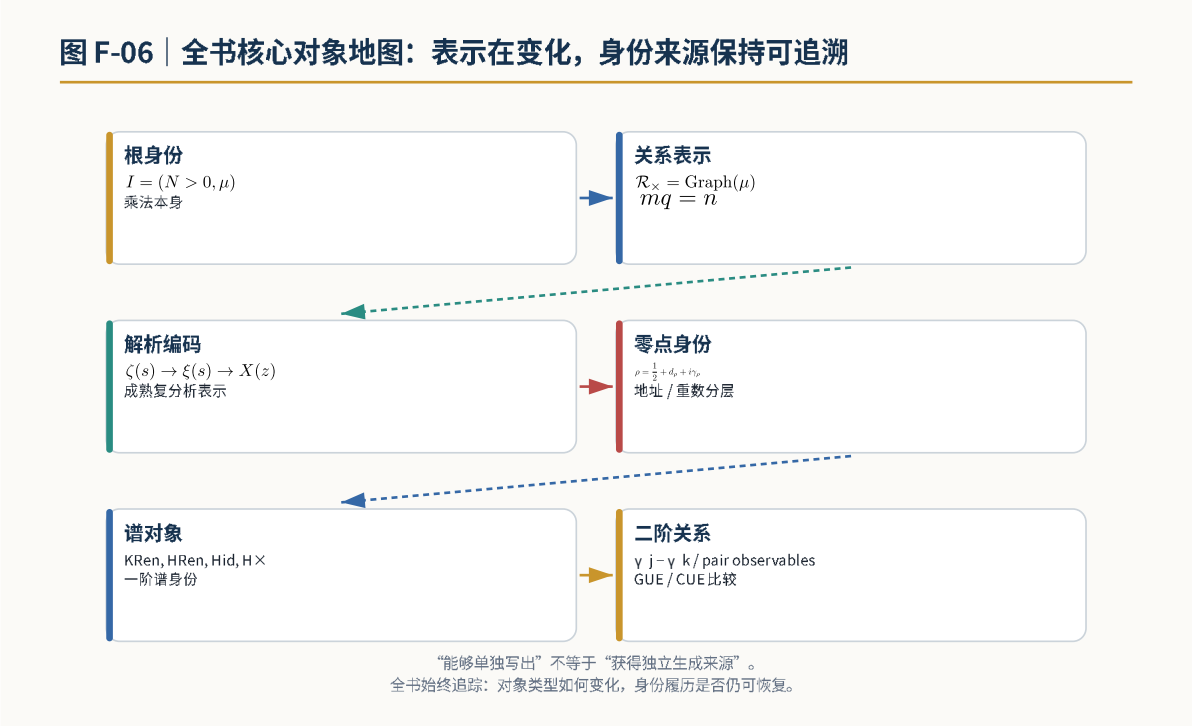


图 F-06　全书核心对象地图。根乘法身份、关系表示、解析编码、零点身份、谱对象与二阶关系属于不同的数学对象层。全书始终追踪同一个问题：表示可以变化，但对象的身份来源是否仍能被无损追溯与恢复。

九　本书给出的两条 黎曼猜想闭合路线

我希望把这本书给出的数学结论说得明确，也说得克制。

截至 2026 年 11 月，Clay Mathematics Institute 仍把 Riemann Hypothesis 列为未解决的千禧难题。[67] 因此，我不会用一句“问题已经解决”来替代数学共同体所要求的独立阅读、复核与接受过程。

但谨慎也不意味着把正文已经给出的结论说得含糊。

这本书明确给出的结论是：

> **第一章给出 黎曼猜想 的直接互反零点事件闭合；**

并且：

> **第九章从同一根乘法身份出发，独立构造源生成 Hilbert–Pólya 自伴谱并再次闭合 黎曼猜想。**

这两条路线不是同一个证明换两个标题。

第一条路线从开放乘法关系、互反角色和完整事件履历出发，证明终端固定角色读数落在

$$\Re\rho=\frac{1}{2}.$$

第二条路线不以 Riemann 零点名单、K_{Ren}、H_{Ren} 或第七章的规范谱见证作为生成输入，而从根乘法身份的源生成侧结构出发，通过两深度身份自配对、双 Hankel / Gram 正性、Stieltjes 重构与谱定理，构造自伴 Hilbert–Pólya 谱，再恢复 Riemann 零点并得到 黎曼猜想。

两条路线最终在规范 Riemann 谱身份处相认。

因此，本书所提出的并不只是：

一个 黎曼猜想证明.

而是：

> 直接互反事件闭合,
> 独立源生成谱闭合,
> 闭合后的零点几何、重数、规范谱与 GUE 二阶结构.

这些结论是否成立，不取决于前言的力度。

它们只取决于正文中的定义与证明能否经受独立核对。

图 F-03｜本书的两条黎曼猜想闭合路线

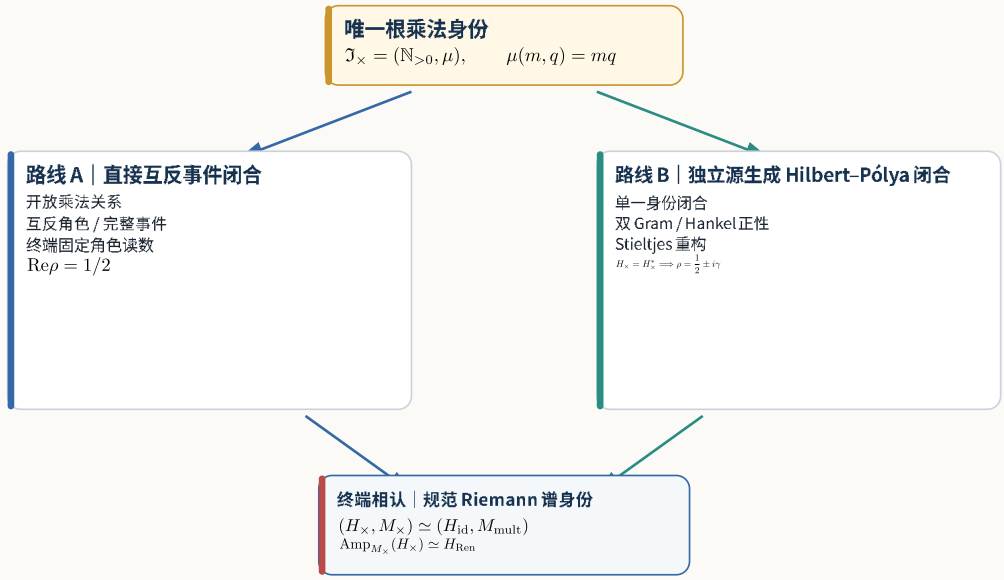


图 F-03　本书的两条黎曼猜想闭合路线。 第一条路线从开放乘法关系与互反角色进入终端固定读数；第二条路线从同一根乘法身份独立生成 Gram/Stieltjes 谱结构与自伴 Hilbert–Pólya 算子。两条路线在完成各自闭合以后，才在规范 Riemann 谱身份处终端相认。

十　第一章：开放乘法关系与互反零点事件闭合

第一章是全书第一条 黎曼猜想主证明。

它从唯一根乘法身份

$$\boxed{\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq}$$

出发。

乘法关系本身不是第二个身份，而只是根身份的关系表示：

$$\mathcal{R}_{\times} = \mathrm{Graph}(\mu).$$

第一章随后严格区分：

$$\boxed{\text{身份} \neq \text{角色} \neq \text{角色读数}.}$$

在源端，因子交换

$$(m,q) \leftrightarrow (q,m)$$

对应反对称角色坐标

$$R = \log(q/m) \mapsto -R.$$

固定角色为

$$R = 0.$$

归一化以后，这一互反固定角色读数为

$$\frac{1}{2}.$$

关键并不是把源端数字 $1/2$ “搬运”到零点实部，而是保持同一完整事件的互反角色结构。

第一章通过中心化 Mellin 表示、全局 Dirichlet 编码、移动视界、完整事件域与终端零点事件，建立：

$$\rho_E(\tau; J_E R) = 1 - \overline{\rho_E(\tau; R)}.$$

当完整事件达到源固定角色

$$J_E R_E = R_E$$

时，终端表示必须满足

$$\rho_E = 1 - \overline{\rho_E},$$

因而：

$$\boxed{\Re \rho_E = \frac{1}{2}.}$$

第一章把 黎曼猜想 写成同一互反事件履历的终端固定角色闭合，而不是把两个独立对象在最后强行匹配。

十一　第二章：零点闭合以后，一个间隔如何携带整个谱

第一章固定横向坐标之后，第二章进入零点纵向几何。

设正零点纵坐标为

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots,$$

解析重数为 m_n，相邻间隔

$$\Delta_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n.$$

第二章研究的是：一个相邻零点区间的边界解析数据能够知道多少全局信息？

通过亚纯 Herglotz 响应、规范视界形状密度、边界解析芽和逆距离谱矩，本章证明完整单侧边界解析芽能够确定全局不同实零点谱及其解析重数；有限阶 Jet 则给出最近邻间隔的严格界。

这使一个看似纯局部的零点间隔获得了新的结构意义：

$$\boxed{\text{局部边界解析芽} \to \text{全局谱矩} \to \text{全局零点谱.}}$$

第二章不再重复第一章的黎曼猜想证明。

它回答的是 黎曼猜想闭合以后，零点间隔本身还能保存多少全局谱信息。

十二　第三章：地址、表示叶数与解析重数必须分开

第三章处理一个在零点理论与谱理论中极易混淆的问题：重数。

本章严格区分三层：

$$\boxed{\text{事件表示叶数} \neq \text{身份支撑地址计数} \neq \text{解析重数.}}$$

对于

$$\xi(s) = (s-\rho)^{m_\rho} U_\rho(s), \qquad U_\rho(\rho) \neq 0,$$

ρ 是零点身份地址，而

$$m_\rho = \operatorname{ord}_\rho \xi$$

是解析重数。

因此，互反表示出现两叶，并不意味着零点具有重数二。

共享区间边界也不能重复计算同一个零点地址。

这一章建立从局部区间地址到全局零点支撑、从支撑计数到除子计数的完整分层，并把后续谱结构所需要的

$$(\gamma_n, m_n)$$

固定下来。

这一步为第六至第九章的身份保真谱与除子保真谱提供了统一的重数基础。

十三　第四章：Riemann 闭合核的参数化与广义黎曼猜想的证明

第四章不另造一条 黎曼猜想证明。

它把第一章已经实现的具体机制抽象成一个可迁移的参数化闭合核，并把这一闭合核第一次应用到 Dirichlet 广义黎曼猜想。

这里最重要的不是“黎曼猜想已证，所以 广义黎曼猜想自动成立”。本章明确拒绝这种逻辑跳跃。真正新增的认证只有一件事：

> Dirichlet character 是否改变了第一章的根乘法身份？

答案被压缩为一个身份保持的通道提升：根乘法仍是

$$\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq,$$

而

$$\mathfrak{P}_{\chi} = \{\chi, \overline{\chi}\}$$

只是同一根身份上的互反 character 包。复杂 character 的 χ 与 $\overline{\chi}$ 是两个互反取向，不是两个母身份。

第四章随后以加权中心核

$$W_{\chi,z}(m,q) = \chi(m)\overline{\chi(q)}m^{-1/2-z}q^{-1/2+z}$$

验证中心化参数、互反角色、moving head/tail 与 primitive completion 全部保持同一身份传导；平方视界固定角色本身只依赖 $mq = n$，因而无需重新证明。由此 K1–K7 对 primitive Dirichlet channel 全部成立，再经 imprimitive 与 principal character 的有限 Euler 因子归约，得到 Dirichlet 广义黎曼猜想。

在这个意义上，第四章把 广义黎曼猜想 的新增内容压缩为：

> **character 只增加通道，不增加第二个根身份。**

它把第一章已经实现的具体机制抽象成一个可迁移的参数化闭合核。

七个条件 K1–K7 分别控制：

1. 根身份与互反角色系统；
2. 中心化互反表示；
3. 中心化参数精确传导；
4. 互反角色保真；
5. 完整事件的生成源固定角色；
6. 零点保真的完成目标与终端穷尽；

7. 规范解析互反对合。

核心定理可以压缩成一句话：

如果同一完整事件的源表示已经处于互反固定角色，并且终端解析表示保持互反角色，那么终端读数必在解析对合的固定集合上。

对于 Riemann 情形，这个固定集合正是

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

第四章因此同时承担两项任务：从第一章的具体 黎曼猜想闭合中提取最小参数化结构，并证明 Dirichlet 特征加权只增加互反通道、不更换根乘法身份，从而把同一闭合核迁移到广义黎曼猜想。

十四　第五章：黎曼猜想闭合之后，横向位置与纵向频率重新分层

第五章进入“闭合后的谱图”。

本章最重要的对象纪律是：

$$\boxed{d_E(\tau) \neq d_\rho.}$$

前者是有限视界事件提升中的内部横向坐标；后者是实际零点的横向坐标

$$d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2}.$$

第一章闭合以后：

$$d_\rho = 0.$$

但有限事件表示仍然可以拥有自身的内部几何。

第五章由此把几类经常被混用的“谱”重新分开：

- 实际 Riemann 零点谱；
- 有限视界事件提升谱；
- 素数幂生成源谱；
- Hilbert–Pólya 纵向谱；
- 随机矩阵二阶统计；
- Weil 正性与其他全局算术—谱响应。

这一章是一张地图。

它告诉读者：黎曼猜想闭合以后，哪些结构真正被固定，哪些结构仍然包含丰富的新信息。

十五　第六章：任毅飞算子与乘法—解析—谱的双向恢复

第六章把完整中心化零点坐标组织成全坐标正规算子。

写

$$a_\rho = \rho - \frac{1}{2} = d_\rho + i\gamma_\rho.$$

定义

$$K_{\mathrm{Ren}} e_{\rho,j} = (\gamma_\rho - i d_\rho) e_{\rho,j}.$$

于是：

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} - i\Delta_{\mathrm{Ren}}.}$$

其中

$$\Gamma_{\mathrm{Ren}}$$

读取零点纵坐标，

$$\Delta_{\mathrm{Ren}}$$

读取横向偏离。

因此 黎曼猜想等价于：

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{Ren}} = 0,}$$

此时

$$H_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}|_{\text{黎曼猜想}}$$

成为正自伴规范 Riemann 谱算子。

本章更重要的内容，是建立正向与反向两条链：

$$\boxed{\text{乘法身份} \to \zeta \to \xi \to K_{\mathrm{Ren}},}$$

以及

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}} \to \xi \to \zeta \to \text{解析延拓前的乘法对数账本.}}$$

因此，第六章讨论的不是一个裸对角谱，而是一个带完整来源标记、可以双向恢复的谱对象。

十六　第七章：一个标量见证如何唯一认出 Riemann 谱

第七章处理 Hilbert–Pólya 路线中最关键的“相认”问题。

一个自伴算子存在，并不等于它就是 Riemann 谱。

本章从 H_{Ren} 中提取规范标量谱见证：

$$F_{\mathrm{R}}(y)=\sum_{n\geq 1}\frac{m_n}{y+\gamma_n^2}=\int\frac{d\nu_{\mathrm{R}}(\beta)}{1+y\beta}.$$

建立：

$$\boxed{F_{\mathrm{R}}\Leftrightarrow\nu_{\mathrm{R}}\Leftrightarrow(H_{\mathrm{id}},M_{\mathrm{mult}})\Leftrightarrow H_{\mathrm{Ren}}.}$$

局部解析芽、全阶矩、Stieltjes 测度和循环谱对象因此相互唯一确定。

如果一个独立构造的循环谱对象

$$(B_\times,\Psi_\times)$$

具有同一个完整标量响应，循环谱定理给出带基点的酉等价，从而确定其 Riemann 谱身份。

第七章的任务只有一个：

> 生成不是相认；相认也不是生成。

这个区分将在第九章变得决定性。

十七　第八章：从一阶 Riemann 谱到 GUE 二阶自身关系

第八章从已经建立的一阶谱身份继续进入 GUE 的二阶结构。

它不把 GUE 当作 黎曼猜想 的证明前提。

在本书中，GUE 的位置严格后置于一阶 Riemann 谱身份。

定义带符号谱算子

$$\mathcal{D}=H_{\mathrm{id}}\oplus(-H_{\mathrm{id}}),$$

以及重数显示

$$\mathcal{M}=M_{\mathrm{mult}}\oplus M_{\mathrm{mult}}.$$

谱振幅

$$Z_\phi(u)=\mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}\phi(\mathcal{D})e^{iu\mathcal{D}}\right]$$

满足精确的二点 Fourier–Plancherel 恒等式。

因此：

$$\boxed{\text{一阶谱}\rightarrow\text{二点自身关系}}$$

成为严格数学接口。

本章随后把二点谱关系经显式公式回译到

$$\Lambda(m)\Lambda(n)$$

的算术自身相关，区分对角 Montgomery ramp 与非对角 shifted correlations，并把有限高度、有限 CUE、Euler 局部修正、展开归一化和重整化残差分别入账。

第七章的一阶谱相认还带来一个重要结论：

如果

$$(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),$$

则全部酉不变二点观测自动继承。

因此 GUE 不是另一套独立身份。

它是同一一阶谱与自身形成关系之后的二阶读数。

十八　第九章：从根乘法身份独立生成 Hilbert–Pólya 自伴谱

第九章是全书第二条 黎曼猜想主证明。

它重新从根身份出发：

$$\boxed{\mathfrak{I}_\times = (\mathbb{N}_{>0}, \mu).}$$

并把根身份在生成源侧的完整身份类记为：

$$\boxed{\mathfrak{C}_\times = [\Omega]_{\mathrm{id}}.}$$

移动视界、完成化、$X/G/F$、扫描泛函、矩、ordinary / shifted Hankel 表和有限 Source–Krylov 截断，都被证明属于同一根身份的不同表示。

关键一步是两深度身份自配对：

$$\mathcal{E}_\times^{[r]}\left(\Psi_i^{[r]}, \Psi_j^{[r]}\right) = \mu_{i+j+r}, \qquad r = 0,1.$$

从而同时得到：

$$\boxed{\mathsf{H}_N \succcurlyeq 0, \qquad \mathsf{H}_N^{(1)} \succcurlyeq 0 \quad (\forall N).}$$

双 Hankel 正性经 Stieltjes moment theorem 给出唯一有限正测度

$$\nu_\times.$$

亚纯性进一步把它压成纯点测度，支撑恢复

$$\gamma_n,$$

原子权重恢复解析重数

$$m_n.$$

定义：

$$B_\times = M_\beta, \qquad H_\times = B_\times^{-1/2},$$

得到：

$$\boxed{H_\times = H_\times^*, \qquad \sigma(H_\times) = \{\gamma_n\}.}$$

于是中心化零点恢复为

$$z = \pm i\gamma_n,$$

即：

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2} \pm i\gamma_n.}$$

这条生成链不以 Riemann 零点名单、K_{Ren}、H_{Ren} 或规范谱见证作为构造输入。

只有在 黎曼猜想已经由源生成谱闭合以后，第七章才进入终端相认：

$$\boxed{(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),}$$

并进一步得到：

$$\widetilde{H}_\times \simeq H_{\mathrm{Ren}}.$$

这就是本书所称的第二条、独立的 Hilbert–Pólya 谱闭合。

图 F-04｜九章结构：从直接闭合到谱与二阶关系，再回到独立谱证明



图 F-04　九章结构总览。 九章不是九个彼此孤立的主题：第一章给出直接闭合；第二至第五章展开零点结构与闭合核；第六、七章建立规范谱对象与谱见证；第八章进入二阶自身关系；第九章从根乘法身份重新独立生成自伴谱并再次闭合黎曼猜想。

十九　怎样阅读这本书

九章构成一条从 黎曼猜想本身向它背后的零点、谱与统计世界逐层展开的道路：

黎曼猜想 直接闭合 → 零点几何与重数 → 闭合核抽象 → 闭合后谱图 → 规范算子 → 谱见证 → GUE 二阶关系 → 独立谱证明.

这条道路并不要求每位读者都用同一种方式进入。

如果你最关心 黎曼猜想 的第一条证明，可以从第一章开始；若想继续看这一闭合机制如何迁移到 Dirichlet 广义黎曼猜想，可以接着阅读第四章。

如果你关心零点本身的结构，第二、三、五章分别讨论零点间隔、身份地址、解析重数以及闭合后的事件谱图。

如果你关心 Hilbert–Pólya 与算子语言，第六、七章给出规范谱对象和谱见证。

如果你关心 Montgomery–GUE、随机矩阵与二阶统计，可以在第七章之后进入第八章。

如果你更想先看一条从乘法身份源端独立生成自伴谱的路线，可以直接进入第九章。第七章在这条路线中承担的是证明完成以后的终端相认，而不是上游生成。

无论从哪一章进入，最好始终记住全书的一条基本纪律：

身份 ≠ 角色 ≠ 角色读数.

它不仅是第一章的语言，也是九章之间能够彼此衔接的共同坐标。

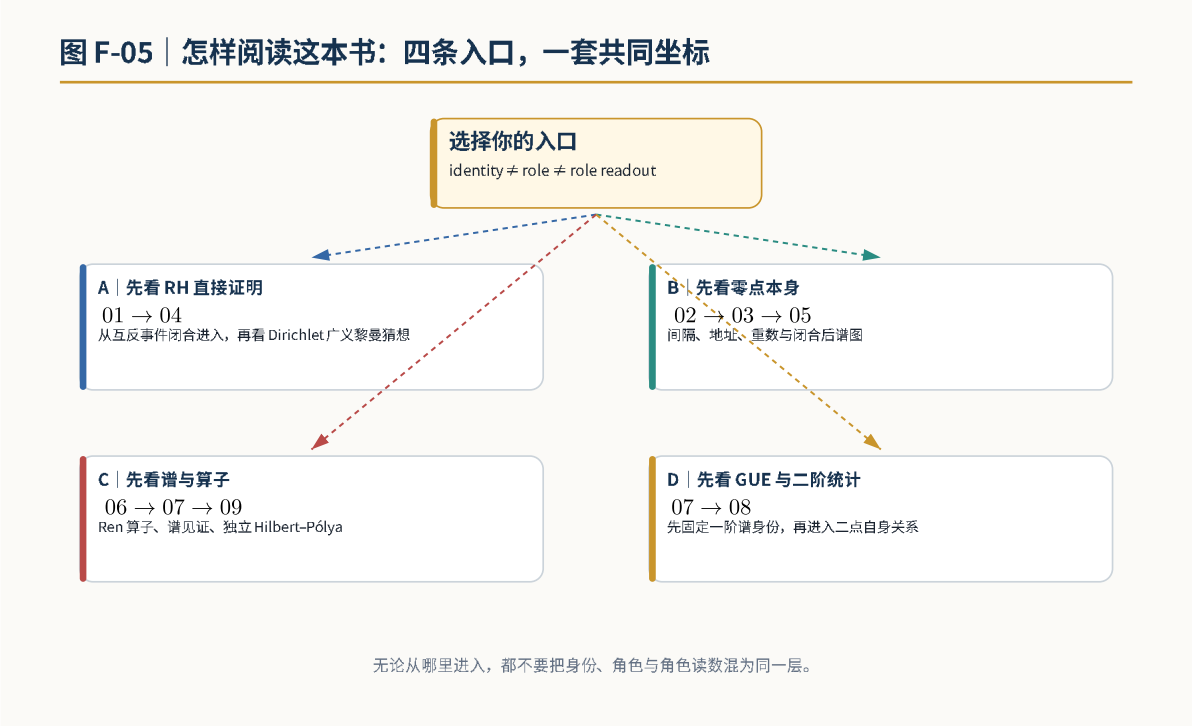


图 F-05　怎样阅读这本书。读者可以从直接证明、零点结构、谱与算子、或 GUE 二阶统计中的任一路径进入；但无论采用哪种阅读顺序，全书共同的对象纪律始终是：身份、角色与角色读数不能混为同一层。

二十　关于“证明”这个词：力度与谦逊应当同时存在

如果你读到这里，我想把“证明”这个词在本书中的用法说得尽可能清楚。

我不希望因为这是黎曼猜想，就把正文中的定理改写成模糊的“可能”“方向”或“尝试”。如果一条论证已经被写成定义、引理、定理和完整推导，它就应当按证明的标准接受检查。

因此，这本书明确声称：

> **本书给出了 黎曼猜想 的直接闭合证明，并给出了独立的 Hilbert–Pólya 源生成谱证明。**

第四章还给出了从同一根乘法身份向 Dirichlet character 通道的最小身份迁移，并由此得到广义黎曼猜想的 Dirichlet 情形。

与此同时，我也不希望“作者写下了证明”被误解成“数学共同体已经完成认证”。

这两句话必须同时成立：

> **作者应当对自己写下的证明承担全部数学责任；**

以及

> **重大数学结论最终必须经受独立阅读、复核、反驳与重建。**

所以，如果你认为某一步不成立，请直接指出那一步。如果某个对象定义形成循环，请把循环写出来。如果某个量词没有覆盖全称结论，请指出缺失的对象域。如果两条被称为独立的路线实际上共享了不应共享的输入，也请明确指出。

反过来，如果这些检查都能通过，那么结论的力度也不应该因为作者的谨慎而被削弱。

我希望这本书最终达到的状态很简单：

> **读者不需要相信作者，也能够把证明重新走一遍。**

这比任何宣告都更重要。

二十一　写在正文之前：好奇心仍然是这本书真正的起点

回头看，这本书的起点并不是“我要解决一个千禧难题”。

它更接近一个孩子气的问题：

$$\boxed{\text{为什么是}\frac{1}{2}\text{？}}$$

好奇心的价值，往往就在这里。

它不先接受问题的庄严程度。

也不先接受已有表示的成熟程度。

它只是问：

为什么？

这个对象从哪里来？

这个数字什么时候出现？

这个证明义务为什么必须存在？

如果换一种表示，它究竟增加了什么？

如果一路向后退，这个问题还在不在？

正是这些看似简单的问题，让视线从零点回到 zeta，从 zeta 回到 Euler 乘积，从成熟分析回到乘法身份；再从身份重新向前，进入零点、谱、算子和 GUE。

因此，在进入正文之前，我想留下一个非常朴素的阅读邀请：

不要因为这是黎曼猜想而相信它。

也不要因为这是黎曼猜想而拒绝它。

请只看：

> **对象是否定义清楚，关系是否保持，证明是否闭合。**

如果答案是肯定的，那么数学会自己说话。

如果答案是否定的，那么明确指出断点，本身就是这本书应当接受的最好回应。

第一章　开放乘法关系、解析身份保真与黎曼猜想的互反零点事件闭合

全书对象纪律： 根身份（root identity）只有一个，即自然数乘法本身；关系表示、素数（Prime）、欧拉乘积（Euler product）、狄利克雷级数（Dirichlet series）、梅林表示（Mellin representation）、黎曼完成（Riemann completion）与终端读数（terminal readout）均按同一身份的分层表示处理。身份（identity）、角色（role）与角色读数（role-reading）严格分层；对象是履历的压缩，履历是对象的展开。本章所称“身份闭包”（identity closure），是指当前表示仍可无损展开、恢复或认证为同一完整乘法身份；闭包即身份持续在场。“终端闭合”则专指固定角色读数（fixed-role readout），不指两个实体零点的碰撞或合并。

摘要

黎曼猜想通常从非平凡零点出发，并把问题压缩为一句话：为什么这些零点的实部都等于$1/2$？本章把问题向前移动一层。与其首先把零点当作已经独立完成的解析对象，不如先追踪它的生成履历：它从哪里来，在什么关系中获得身份，又经过了哪些表示以后，才成为今天可以被单独寻址的零点读数。

全书的根身份只有一个：自然数乘法本身。开放乘法关系、素数、唯一分解、欧拉乘积、狄利克雷级数、中心化梅林 表示、乘法壳层、移动视界、黎曼完成 与终端零点读数，都被组织为同一个乘法身份的分层表示。表示可以不断展开、压缩、重组并取得新的坐标，但这并不自动产生新的生成身份。本章据此区分 身份、角色 与 角色读数：身份始终同一，角色由关系显现，读数随表示改变。

这一组织方式的核心可以概括为一句话：

对象是履历的压缩；履历是对象的展开。

一个成熟数学对象能够被单独命名和计算，并不意味着它已经脱离生成关系。真正需要检查的是：经过多层压缩以后，它是否仍然能够无损展开、恢复或认证为原来的完整乘法身份。本章把这种可恢复性称为“身份闭包”，并把“闭包”理解为身份持续在场的可检验条件。

这一视角同时解释了一个常被忽略的问题：没有来源要求的裸结果，本身并不会产生“为什么如此”的解释责任；新的解释债务往往出现在一个本来具有明确生成履历的结果，被从履历中切离以后重新对象化。本章因此不把 $\Re\rho = 1/2$ 首先视为一个孤立终端数值的神秘选择，而是追问：这个终端读数是否仍处于同一个乘法身份闭包中；同一个互反固定关系 是否在全部表示层持续在场，并在终端解析层取得唯一的 固定角色读数。

从这一全局结构看，整条解析链可以直观地理解为同一个身份进入一层又一层逐渐收束的表示通道。素数、欧拉/狄利克雷、梅林、壳层、ζ、ξ 与零点读数 并不是一串彼此替换的对象，而是同一身份逐步被压缩和解析化的不同阶段。生成端的互反角色在归一化坐标中有唯一固定位置；在终端解析表示中，同一互反作用读作

$$\rho \mapsto 1-\overline{\rho},$$

其固定读数满足

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

这里的 $1/2$ 不是从源端数值搬运到终端，而是同一个 固定关系 在终端表示中的压缩读数。

技术上，本章以中心化梅林分解、乘法壳层偶性、双 ζ 总编码、移动视界（moving horizon）的精确重分配（exact repartition）、完成化下的参数保真、平方视界固定角色、终端对象域以及互反角色保真，承担上述全局图景中的逐层数学责任。移动视界尤其承担两个相互关联的职责：一方面，它把 首部/尾部（head/tail） 与互反两翼组织为同一事件的动态角色呈现，使相邻视界成为同一过程的连续提升而非两个固化对象；另一方面，它用一族精确的有限视界表达完整无穷对象，每一步都保持 $H_r + T_r = \zeta$，因此不是以有限近似无限，而是在有限动态中保持无限身份。事件身份、中心化参数与角色归属沿表示链保持一致；终端固定角色因而在解析层读取为 互反对合的固定点。

本章还把这一正向解析收束放入更大的研究结构中理解：第六章（H06）的任毅飞算子承担从高度压缩对象逆向恢复乘法身份的方向；第九章（H09）从同一根乘法身份独立构造源生成（source-generated）自伴谱路线；第七章（H07）则承担规范谱的黎曼身份见证、唯一性与相认责任。三者不作为本章主定理的证明输入，而用于说明“闭包”的更完整含义：压缩以后能够恢复身份，而身份一旦恢复，仍可沿其他合法道路重新展开。

因此，本章并不以“继续向公式深处钻入”为唯一组织原则，而是在每个局部证明中持续保持全局对象关系：**身份始终同一，表示不断展开并逐层收束；对象是履历的压缩，履历是对象的展开；可无损恢复者构成身份闭包，闭包意味着身份持续在场。**

总纲：一个乘法身份，多层表示

进入具体证明以前，先固定本章的对象层级。这里的目的不是在数学证明之外增加一套解释，而是避免后文把同一个身份在不同表示中的读数误当成彼此独立的生成对象。

0.1 根身份：自然数乘法本身

全书统一的根身份记为

$$\boxed{\mathfrak{I}_{\times} := (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq.} \tag{0.1}$$

开放乘法关系

$$\mathcal{R}_{\times} = \{(m,q,n) \in \mathbb{N}^3 : mq = n\}$$

是 μ 的关系表示。固定 n 后，

$$\mathcal{D}_n = \{(m,q) \in \mathbb{N}^2 : mq = n\}$$

是同一关系表示的纤维层。因而，根身份、关系表示与纤维表示需要严格区分层级，但不需要被解释成三个不同的生成来源。

素数 同样不构成第二根身份。令 μ_{nt} 表示限制在 $m,q>1$ 上的非平凡乘法，则

$$\mathbb{P} = \mathbb{N}_{\geq 2} \backslash \mathrm{Im}\mu_{\mathrm{nt}}. \tag{0.2}$$

素数 首先是乘法结构内部显露出的不可约位置。算术基本定理进一步给出

$$n = \prod_{p} p^{v_p(n)}, \tag{0.3}$$

从而把这些不可约位置重新组织为完整自然数乘法的生成基元。

因此，本章讨论的不是

$$\text{乘法} \rightarrow \text{素数} \rightarrow \zeta$$

意义上的身份更替，而是同一个乘法身份在不同分辨率下的表示展开。

图 01-01｜一个根乘法身份，多层表示

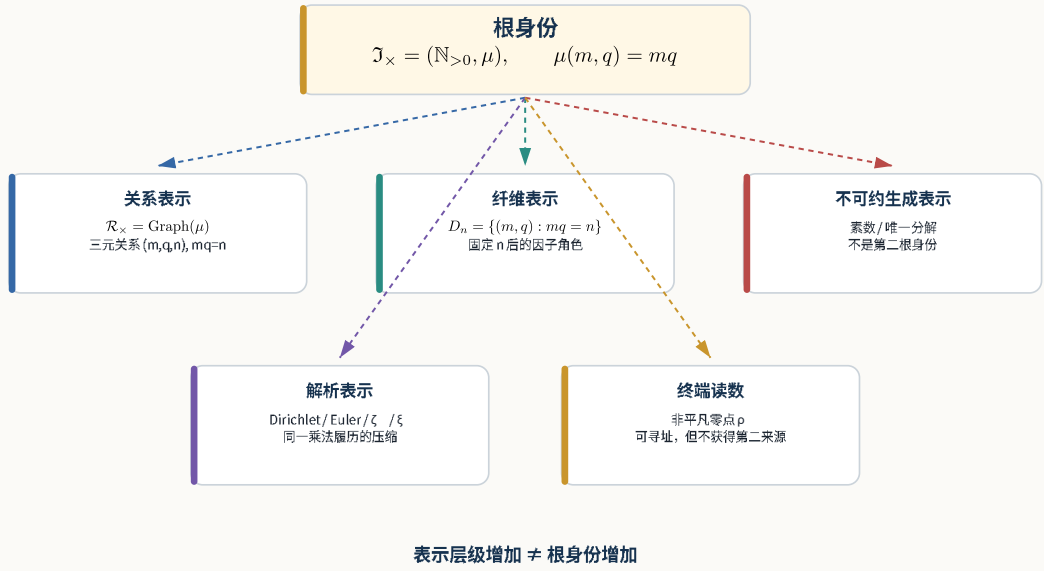


图 01-01　一个根乘法身份，多层表示。 根身份始终是自然数乘法本身；开放关系、固定纤维、素数/唯一分解、解析编码与终端零点，只是同一乘法身份在不同分辨率和对象类型中的表示。表示层级增加，并不意味着生成身份增加。

0.2 对象与履历

本章采用如下对象纪律：

对象是履历的压缩；履历是对象的展开。

(0.4)

一个数学对象能够被单独命名、寻址和计算，并不因此获得独立于原生成关系的第二身份。对象化首先意味着：一段生成关系履历被压缩为稳定、可操作的表示。反向展开，则是把这一压缩对象重新放回其生成关系、角色关系与表示结构中读取。

因此，

$$\boxed{\text{可寻址性增加} \neq \text{身份信息增加.}} \tag{0.5}$$

表示层级可以不断增加，而根身份不必发生相应迁移。

一个最简单的直觉例子：问题何时产生

在进入“闭包”以前，可以先看一个最简单的例子：

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

这里需要先区分两种完全不同的情形。

如果只给出一个没有任何来源要求的裸数字

$$6,$$

并不会自然产生“为什么它是 6”这个问题。它只是一个已经给定的数值，并没有附带需要解释的生成责任。

问题真正产生在另一种情形中：6 本来就是

$$1 + 2 + 3$$

这一关系的结果，但当左侧的生成履历被从当前表述中切离，只留下右侧结果以后，人们又重新追问：

$$\text{为什么结果恰好是 } 6?$$

这时，新的“为什么”并不是由结果本身自动产生的，而是由**生成履历被切断以后，结果重新被当作独立对象**而产生的。只要把原来的关系恢复出来，

$$1 + 2 + 3 \to 6,$$

结果为何为 6 已经包含在这一生成关系之中，并不需要在结果端再引入一个新的来源解释。

因此，这个例子所强调的重点不是“能否仅凭裸的 6 唯一反推出 $1 + 2 + 3$”。裸结果本身没有这种义务。真正需要审计的是：一个本来具有生成履历的结果，在后续表示中被压缩、独立寻址以后，其生成关系是否仍然持续在场。

这正是本章理解黎曼问题的入口。非平凡零点

$$\rho = \sigma + i\gamma$$

并不是一个没有来源要求的裸复数。它位于

$$\Im_{\times} \to \text{素数} \to \text{狄利克雷/欧拉} \to \zeta \to \xi \to \rho$$

这一完整的乘法—解析表示履历中。

因此，当问题被写成

$$\text{为什么}\sigma = \frac{1}{2}\text{？}$$

时，首先需要审计的不是一个孤立终端数值为何“选择”了 $1/2$，而是：这个终端读数是否仍属于同一个乘法身份闭包；在完整履历中，互反固定关系 是否始终在场，并在终端解析表示中被读成

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

从这个角度看，本章所追踪的并不是一个终端数值的外部来源，而是一个本来就具有生成履历的对象，在多层表示之后是否仍保留原来的身份与固定关系。

可以把这一对象纪律压缩为：

> 裸结果本身不产生来源问题；切断既有生成履历以后重新追问结果为何如此，才会产生新的解释债务。
>
> (0.5a)

这个简单例子只负责澄清问题的组织方式，并不代替后文任何数学证明。真正的证明责任仍然是：逐层验证从乘法身份到终端解析表示的身份闭包、角色保真与对象域完备性。

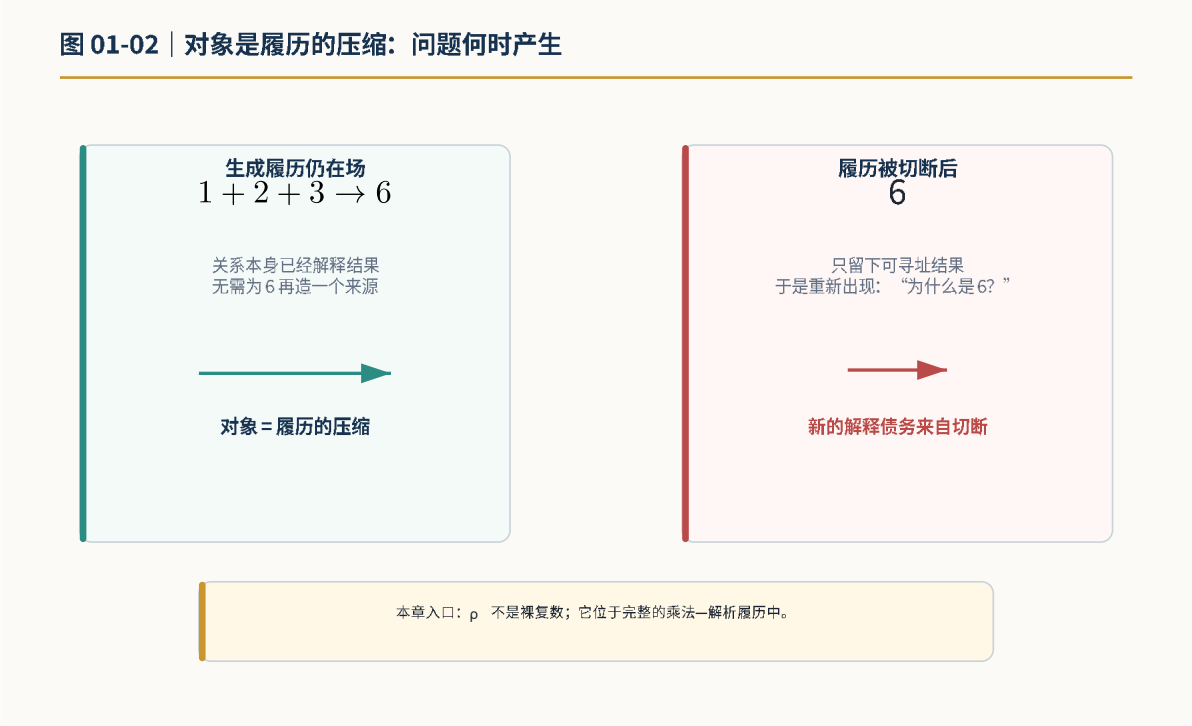


图 01-02　对象是履历的压缩：问题何时产生。 当生成履历仍在场时，结果已经包含在关系之中；当履历被切断，只留下可寻址结果时，才会重新出现“为什么如此”的解释债务。本章据此把非平凡零点放回完整的乘法—解析履历中审计。

0.3 身份闭包：可无损恢复即身份在场

为了使“同一身份”成为可检验的数学责任，本章把闭包与可恢复性联系起来。

记完整乘法生成履历为

$$\mathcal{H}_{\times}.$$

设某一层压缩表示为

$$C_k : \mathcal{H}_{\times} \to X_k.$$

若存在相应的展开或恢复

$$U_k : X_k \to \mathcal{H}_{\times}$$

使得

$$\boxed{U_k \circ C_k \equiv_{\mathrm{Id}} \mathrm{id}_{\mathcal{H}_{\times}},} \tag{0.6}$$

即恢复后仍为同一个完整乘法身份，则称 X_k 对乘法身份闭包。

这里的 $\equiv_{\mathrm{Id}}$ 强调身份等价，而不是要求不同表示在符号或坐标上逐项相同。闭包的含义可以简写为

$$\boxed{\text{可无损恢复} \Leftrightarrow \text{身份闭包} \Leftrightarrow \text{身份持续在场}.} \tag{0.7}$$

于是，判断一个成熟解析表示是否仍属于原乘法身份，不能只检查其外形是否相似，而要检查其生成履历是否仍可恢复或认证。

0.4 ζ：同一乘法身份的全局解析压缩

在 $\Re s > 1$ 上，

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}. \tag{0.8}$$

由唯一分解与绝对收敛，

$$\zeta(s) = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}. \tag{0.9}$$

式 (0.8) 与式 (0.9) 不代表两个独立来源。前者从完整整数层读取同一乘法身份，后者从不可约生成元层读取同一乘法身份。换言之，狄利克雷表示与 欧拉表示是同一乘法身份的两种标准展开。

在此结构下，欧拉乘积不是作为独立的补充假设加入，而是由自然数乘法的不可约分解在解析表示中产生。它同时提供一项重要的身份见证：全局整数表示仍保留其 素因子生成履历。

若另有

$$F(s) = \sum_{n\geq 1} c_n\, n^{-s},$$

即使 F 具有相似的狄利克雷外形、函数方程或 互反零点对称，也不能据此判定 F 具有与 ζ 相同的闭包身份。身份判别最终仍落在生成履历是否属于同一乘法闭包，以及能否恢复为同一根身份。

0.5 身份、角色与角色读数

本章严格采用

$$\boxed{\text{身份} \neq \text{角色} \neq \text{角色读数.}} \tag{0.10}$$

身份 是贯穿表示变化而持续在场的生成身份；角色 是同一身份内部由关系产生的位置；角色读数 是角色进入某一具体表示以后获得的坐标或解析读数。

例如，在

$$mq = n$$

中，m, q 是同一个乘法身份内部的 互反角色；

$$J(m, q) = (q, m)$$

只交换角色位置，不产生第二身份。

进入相对坐标以后，

$$R = \log\frac{q}{m}$$

是角色读数；进入 中心化梅林 表示以后，

$$W_z(m, q)$$

是另一层读数；进入事件的解析表示以后，

$$\rho_{E,\pm} = \frac{1}{2} \pm d_E + i\gamma_E$$

仍是同一身份内部 互反角色 的解析读数。

因此，同一身份内部可以存在不同角色读数；读数不同，不等于身份分裂。

0.6 1/2 的位置：同一固定关系的不同表示读数

在归一化乘法坐标中，

$$u = \log_n m, \qquad v = \log_n q, \qquad u + v = 1,$$

而 互反作用读作

$$u \mapsto 1 - u.$$

固定角色满足

$$u = \frac{1}{2}. \tag{0.11}$$

在相对乘法坐标

$$R = \log \frac{q}{m}$$

中，同一互反作用读作

$$R \mapsto -R,$$

固定角色为

$$R = 0. \tag{0.12}$$

终端解析表示中的 互反作用为

$$\iota(\rho) = 1 - \overline{\rho}.$$

固定读数满足

$$\rho = 1 - \overline{\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \Re\rho = \frac{1}{2}. \tag{0.13}$$

因此，

$$u = \frac{1}{2}, \qquad R = 0, \qquad \Re\rho = \frac{1}{2}$$

不是三个层次之间的数值搬运。它们分别是同一个互反固定关系 在不同表示中的 角色读数。

这里还需区分“终端读数”与“身份闭包”。裸的数字 1/2 本身并不携带完整乘法履历；真正闭包的是包含该读数的完整终端表示。终端读数可以高度压缩，而身份履历由闭包结构保证不被删除。

0.7 一个连续的图景：身份进入一层又一层表示

前面的定义可以用一个更直观的图景理解。

同一个乘法身份沿着后续数学结构不断向前展开时，可以把每一层表示想成一个漏斗、筛子或通道。进入下一层以后，身份的可见形式会改变，能够自由变化的表示成分也会逐步减少；但只要这一层仍然属于同一个身份闭包，经过筛分的仍是同一个乘法身份。

因此，更准确的说法不是“身份不动”，而是

> 身份始终同一，表示不断展开并逐层收束。

从根乘法身份出发，可以看到一条连续的解析表示履历：

$$\mathfrak{I}_{\times} \to \text{素数} \to \text{狄利克雷/欧拉} \to \text{中心化梅林} \to \text{乘法壳层} \to \zeta \to \xi \to \text{终端零点读数}.$$

这里的箭头都表示同一个身份进入新的表示条件，而不是一个对象被另一个对象替换。

“漏斗”这个比喻的重点在于：越往后，允许的表示位置越受到已经建立的关系约束。到了终端互反表示，同一个固定角色的解析读法满足

$$\rho = 1 - \overline{\rho},$$

其固定点集唯一给出

$$\mathfrak{R}\rho = \frac{1}{2}.$$

因此，终端的 $1/2$ 不是零点在最后一刻额外“选择”的位置。若前面的 身份闭包与 互反角色保真 已经成立，那么它是同一个互反固定关系 经过全部表示收束以后，在终端解析层唯一允许的固定角色读数。

可以把这一点写成

> 表示不断收束，身份始终同一； 终端固定位置是完整履历的压缩读数。

这也说明为什么一旦忘记前面的履历，问题会重新显得神秘。只站在漏斗最窄的出口观察

$$\rho = \frac{1}{2} + i\gamma,$$

而把它已经经过的乘法、不可约分解、欧拉/狄利克雷、梅林、完成化与 互反结构全部从当前表述中拿掉，就会重新产生“为什么偏偏是 $1/2$”这一解释债务。把履历恢复以后，真正需要证明的则变成：这一整条通道是否始终保持同一个身份，以及固定角色是否在所有表示中持续在场。

0.8 闭包不仅意味着可以返回，也意味着身份恢复后可以重新展开

“履历的展开”并不要求只能沿原来的表示路线倒退。

若一个高度压缩的终端对象能够无损恢复为原来的乘法身份，那么真正被恢复的是 身份，而不是某一条特定表示路径。一旦根身份被恢复，它仍然拥有由该身份允许的其他合法展开方向。

因此，可以把正向压缩与逆向恢复写成

$$\mathfrak{I}_{\times} \to \text{解析多层表示} \to \text{高度压缩的终端对象} \to \mathfrak{I}_{\times},$$

其中最后一个箭头表示身份恢复，而不是把历史简单倒放。

在本书后续章节中，这一结构由不同章节分别承担。第六章（H06）《RH 任毅飞算子：乘法身份、解析延拓与规范谱之间的无损桥梁》引入任毅飞算子，承担从高度压缩的解析/谱对象向乘法身份展开、恢复与相认的逆向方向。它的作用不是为终端对象重新制造一个 生成源，而是把已经压缩的身份履历重新展开，使根乘法身份再次显现。

身份恢复以后，并不意味着只能沿本章（H01）的解析道路原路返回。同一个

$$\mathfrak{I}_{\times}$$

还可以进入另一条独立展开路线。第九章（H09）《黎曼猜想的另一条闭合路径：开放乘法身份与 Hilbert–Pólya 独立谱路线——从开放乘法身份到 source-generated 自伴谱与规范终端相认》从同一开放乘法身份出发，独立构造 源生成 的自伴谱路线。它的逻辑独立性必须保持：第九章（H09）并不以本章（H01） 或任毅飞算子的逆向恢复为成立前提。

第七章（H07）《黎曼谱见证定理：任毅飞规范谱见证的唯一性与 希尔伯特－波利亚身份传递》则位于谱身份的见证与相认层。就全书的组织而言，可以把三者的分工概括为

H06:	从压缩对象逆向恢复并展开乘法身份；
H09:	从乘法身份独立构造源生成自伴谱；
H07:	对规范谱承担 黎曼身份的见证、唯一性与相认责任。

因此，第七章（H07）与第九章（H09）的关系不是“先有第七章（H07），第九章（H09）才成立”，也不是“任毅飞算子直接生成第九章（H09）的独立谱”。更准确的结构是：第九章（H09）独立从根身份长出谱；第七章（H07）对这一规范谱所承载的 黎曼身份提供见证与相认。与此同时，第六章（H06）从另一侧提供身份恢复，使解析压缩路线与谱路线可以在同一个根身份上重新会合。

这一系列关系更适合写成一个以 身份 为闭合判据的回环，而不是左右分叉的树：

$$\mathfrak{I}_{\times} \xrightarrow{\text{H01}} \text{解析逐层收束} \to \underbrace{\rho,\ \Re\rho = \frac{1}{2}}_{\text{终端零点 / 最窄位置}} \xrightarrow{\text{H06}} \mathfrak{I}_{\times} \xrightarrow{\text{H09}} \text{源生成自伴谱} \xrightarrow{\text{H07}} \text{黎曼规范谱见证.} \tag{0.14a}$$

其中第一段

$$\mathfrak{I}_{\times} \to \rho \to \mathfrak{I}_{\times}$$

在身份层构成“压缩—恢复”的闭环：本章（H01）把同一个乘法身份沿解析路线逐层压缩到终端零点读数，第六章（H06）再从这个高度压缩位置逆向恢复根身份。恢复到根部以后，同

一身份并不只能原路返回；第九章（H09）可以从根身份独立构造源生成自伴谱，第七章（H07）再对该规范谱承担 黎曼身份见证、唯一性与相认责任。这里真正闭合成圈的是 身份，而不是某一种固定表示形式。

这张图不是本章主定理的证明输入，而是对“对象是履历的压缩；履历是对象的展开”的全书结构说明。它揭示了闭包更完整的一层含义：

> 压缩后能够恢复身份； 身份一旦恢复，仍可沿其他合法道路重新展开。

所以，真正持续在场的不是某一条固定表示路径，而是能够穿过不同表示道路、在压缩与展开之间保持可认证同一性的根身份。

图 0.1　从解析收束、身份恢复到谱见证的整体图景

下面的示意图只用于帮助读者把本章与全书后续章节放在同一个对象结构中理解；它不承担任何独立证明责任。左侧表示本章（H01）的解析/零点收束路线：同一个乘法身份经过多层表示逐步压缩，在终端互反表示 中落入 固定角色读数。第六章（H06）表示从高度压缩对象逆向恢复乘法身份的方向；第九章（H09）表示从同一根身份出发的独立 源生成自伴谱路线；第七章（H07）则承担规范谱的黎曼身份见证、唯一性与相认。

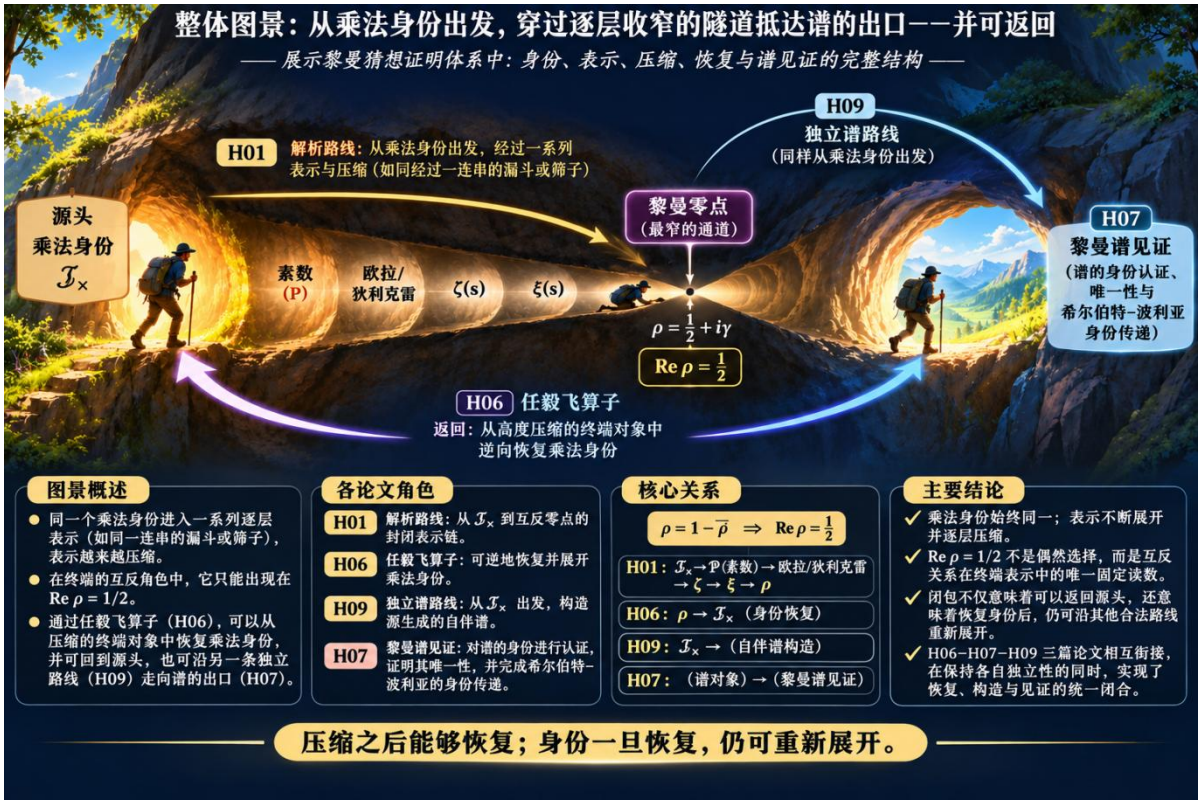


图 0.1　乘法身份经过解析收束、身份恢复并沿独立谱路线重新展开

图中最重要的不是“路径很多”，而是所有路径都以同一个根身份为判据。解析路线可以收束，压缩对象可以被恢复，恢复后的身份还可以沿独立谱路线重新展开；真正持续在场的是可认证的 身份，而不是某一种固定表示形式。

0.9 本章证明责任

总纲只负责固定对象层级。后文仍需逐层证明：

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{乘法身份} \to \text{关系表示} \to \text{互反角色} \to \text{中心化梅林} \to \\ &\text{壳层} \to \text{狄利克雷/欧拉} \to \text{首部/尾部} \to \text{完成化} \to \\ &\text{终端角色读数.}\end{aligned}} \tag{0.14}$$

具体责任包括：身份不被替换；互反角色 归属 不被重新配对；中心化参数 不被重置；各解析表示仍属于同一乘法身份闭包；终端对象域覆盖全部实际非平凡零点；固定角色归属 在终端解析表示中仍按同一互反作用读取。

因此，GHT 在本章中只承担对象审计：它帮助区分身份、角色、角色读数与履历。具体闭包是否成立，仍由后文的标准数学恒等式、唯一性、精确重分配、完成化与终端对象域逐层承担。

本章可以压缩为以下总原则：

身份始终同一，表示不断展开； 角色随关系显现，读数随表示改变； 对象是履历的压缩，履历是对象的展开； 可无损恢复者构成身份闭包，闭包意味着身份持续在场。

(0.15)

1. 引言

黎曼猜想断言：黎曼 ζ 函数的每一个非平凡零点 ρ 都满足

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

经典表述通常直接从 ζ、完成函数与零点开始。本章保留这些标准对象，但把组织顺序向前推进一层：先固定自然数乘法这一根身份，再追踪同一身份如何经过关系表示、不可约分解、狄利克雷/欧拉表示、中心化梅林、壳层、移动视界与完成化，最终进入零点读数。

这里的重点不是用一个宏观比喻替代局部证明，而是要求每个局部公式始终回答一个全局问题：**这一层究竟改变了什么，又保留了什么？** 如果一个公式只在局部成立，却无法说明它在整条身份履历中的位置，那么它还没有完成本章所要求的证明责任。相反，每一个技术步骤都应同时交代其对象含义：它是在改变表示、重排可见信息、压缩关系，还是已经更换了身份、参数或角色归属。

因此，本章采用“由全局结构进入局部细节，再由局部证明返回全局结构”的写法。公式的严谨性不可减少，但公式并不是终点；它们的职责是共同证明同一个乘法身份在多层表示中没有被替换，并最终说明 终端固定角色读数 为什么只能落入 互反对合的固定点集。

这一组织顺序并不改变标准分析对象，也不把 GHT 引入证明步骤。它只要求在每一次表示变化中明确区分：什么是持续在场的身份，什么是身份内部的角色，什么只是某一表示层的角色读数。

本章首先排除三个容易混淆的推论。

第一，**函数方程的反射对称本身不能证明黎曼猜想。** 它只能说明：若 ρ 是零点，则相应互反读数 $1-\overline{\rho}$ 也出现。只要 $\Re\rho \neq 1/2$，两个读数完全可以分居临界线两侧。因此，真正需要证明的不是“存在对称”，而是“为什么终端角色必须落入该互反作用的固定点集”。

第二，**乘法端的 $1/2$ 与解析端的 $1/2$ 不能作数值偷换。** 前者来自 $mq=n$ 的归一化角色交换，后者来自 $\rho \mapsto 1-\overline{\rho}$ 的固定点方程。本章追踪的是同一固定关系 的表示保真，而不是把一个坐标数值搬到另一个坐标系。

第三，**同一身份不应在表示变化中被拆成若干独立来源，再另设来源对应关系。** 本章固定

$$E_{\text{source}} \equiv E_{\text{analytic}} \equiv E_{\text{terminal}}$$

作为同一个事件身份的不同表示阶段。身份保真负责排除身份替换，参数保真负责排除 $z \mapsto \tilde{z}$ 的重参数化，角色保真负责排除 互反角色在中途被重新配对；身份闭包进一步要求，成熟压缩表示仍可展开、恢复或认证为同一个完整乘法身份。

为保持术语一致，本章采用以下约定：

- 根身份：自然数乘法本身 $\mathfrak{I}_{\times}=(\mathbb{N}_{>0},\mu)$，其中 $\mu(m,q)=mq$；
- 关系表示：$\mathcal{R}_{\times}=\mathrm{Graph}(\mu)$；
- 身份：在表示变化中持续在场、并可由闭包结构恢复或认证的生成身份；
- 角色：同一身份内部可以互反交换的关系位置；角色不是第二个身份对象；
- 角色读数：某个角色在具体表示层中的数值或解析坐标；
- 身份闭包：当前压缩表示仍可无损展开、恢复或认证为同一个完整乘法身份；
- 身份在场：当前表示属于该身份闭包；
- 中心化解析参数：沿解析表示链追踪的 z；
- 事件提升（event lift）：有限视界中用于描述同一身份的互反角色读数 的中间解析表示；
- 终端读数：完整黎曼对象 ξ 上的实际零点读数；
- 移动视界：首部与尾部之间的精确分界移动；
- 精确重分配：移动视界只改变分配，不改变完整对象。

在符号上，本章采用

$$d_E(\tau)$$

表示有限视界事件提升的横向坐标，并采用

$$d_\rho := \Re\rho - \frac{1}{2}$$

表示实际终端零点的横向坐标。必须始终保持

$$\boxed{d_E \neq d_\rho \quad \text{作为对象类型.}}$$

事件内部 $d_E \neq 0$ 只表示同一身份的两个互反角色在该中间表示中具有不同读数；它不意味着存在两个独立身份，更不意味着完整 ξ 的实际零点发生实体式离轴运动。

本章的主链依次包括：开放乘法的互反组织、中心化梅林分解、乘法壳层偶性、双 ζ 总编码、首尾精确迁移、中心化参数保真（centered-parameter fidelity）、终端对象域穷尽，以及平方视界端点的生成源固定角色。第 6 节把这些节点组织为同一个互反事件的双保真精确传导，并据此读取终端固定角色。

2. 开放乘法关系与自对偶固定读数

在这一节中，$\mathcal{R}_\times$ 不再被作为根身份本身，而作为自然数乘法 $\mu(m,q)=mq$ 的关系展开。这样处理的目的，是从一开始就保持“身份—表示”的层级清楚：根身份是乘法，$\mathcal{R}_\times$ 是根身份的一个确定表示。

定义 2.1

定义自然数乘法

$$\mu:\mathbb{N}_{>0}\times\mathbb{N}_{>0}\to\mathbb{N}_{>0},\qquad \mu(m,q)=mq,$$

并定义其开放乘法关系表示

$$\boxed{\mathcal{R}_\times=\mathrm{Graph}(\mu)=\{(m,q,n)\in\mathbb{N}^3:mq=n\}.}$$

对固定 n，记

$$\mathcal{D}_n=\{(m,q)\in\mathbb{N}^2:mq=n\}.$$

定义互反交换

$$J(m,q)=(q,m).$$

这里的 J 只交换同一个乘法身份中的两个因子角色；它不产生第二个生成源对象。以下各节中的互反构造都保持这一角色—身份区分。

引理 2.2（唯一自对偶固定读数）

设 $n>1$，定义

$$u=\log_n m,\qquad v=\log_n q.$$

则

$$u+v=1,$$

而 J 在归一化坐标中作用为

$$u \leftrightarrow 1-u.$$

其唯一固定点为

$$\boxed{u=v=\frac{1}{2}}.$$

证明

由 $mq=n$ 得

$$\log_n m+\log_n q=1.$$

交换 m,q 即交换 u,v，故在单变量表示下为 $u\mapsto 1-u$。固定点满足

$$u=1-u,$$

所以 $u=1/2$。证毕。

重要说明：生成源侧的 $1/2$ 只说明乘法角色交换的固定坐标。 它不等于、也不直接推出黎曼零点实部的 $1/2$。后者只能由终端解析互反对合的固定点方程得到。二者数值相同，但证明职责不同。

定义 2.3

为统一本章的乘法坐标，定义乘法总尺度与相对角色坐标

$$\boxed{L_\times:=\log(mq),\qquad R:=\log\frac{q}{m}.} \tag{2.1}$$

同时保留原有半坐标

$$\ell(m,q):=\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}\log\frac{q}{m}. \tag{2.2}$$

则互反交换给出

$$L_\times\mapsto L_\times,\qquad R\mapsto -R,\qquad \ell\mapsto -\ell. \tag{2.3}$$

因此 $R=0$（等价于 $\ell=0$）是生成源角色交换的固定截面；在裸乘法关系中它就是 $m=q$。

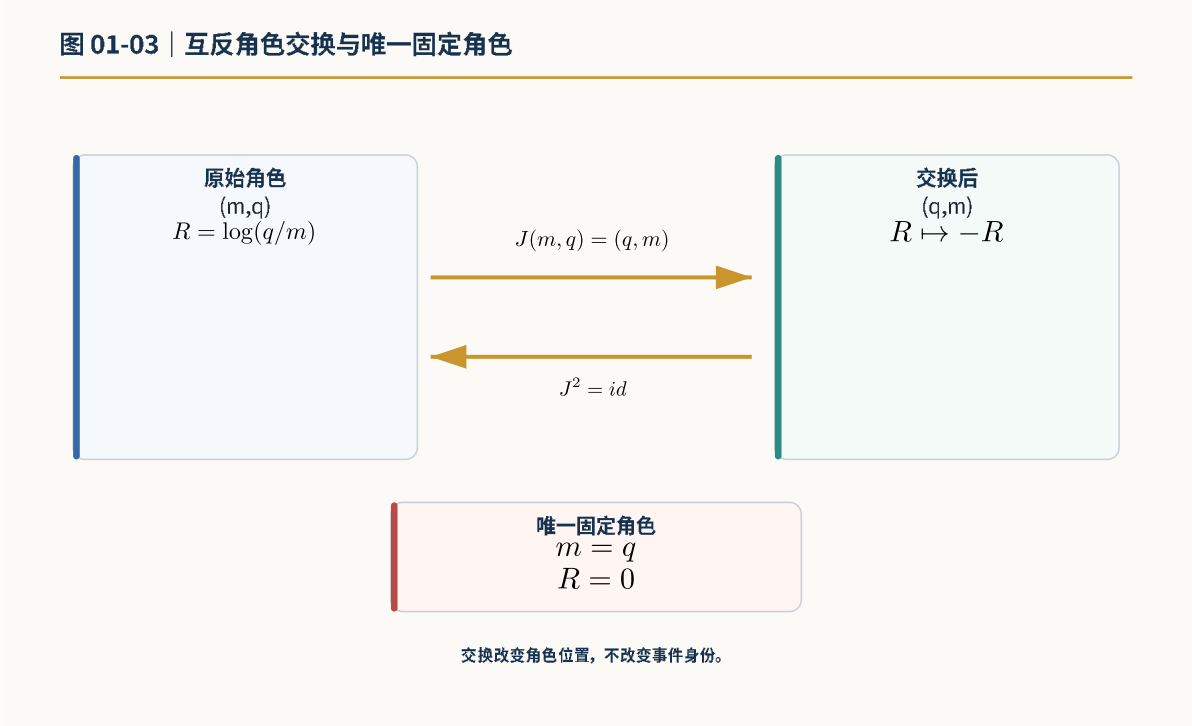


图 01-03　互反角色交换与唯一固定角色。 互反作用 $J(m,q) = (q,m)$ 改变的是同一乘法事件内部的角色位置；相对关系量 $R = \log(q/m)$ 同时变为 $-R$。唯一不被交换改变的角色满足 $m = q$，即 $R = 0$。

3. 中心化梅林表示

命题 3.1（中心化梅林分解）

令

$$s = \frac{1}{2} + z, \qquad z = \delta + i\gamma.$$

定义中心化梅林核

$$W_z(m,q) := m^{-1/2-z} q^{-1/2+z}.$$

则

$$\boxed{W_z(m,q) = (mq)^{-1/2} e^{2z\ell(m,q)} = e^{-L_\times/2} e^{zR}.}$$

证明

直接计算：

$$\begin{aligned} m^{-s} q^{-(1-s)} &= m^{-1/2-z} q^{-1/2+z} \\ &= (mq)^{-1/2} \left(\frac{q}{m}\right)^{z} \\ &= (mq)^{-1/2} e^{2z\ell(m,q)} = e^{-L_\times/2} e^{zR}. \end{aligned}$$

证毕。

于是，若 $z=\delta+i\gamma$，则

$$|W_z(m,q)| = e^{-L_\times/2}e^{\delta R} = (mq)^{-1/2}e^{2\delta\ell}.$$

当 $\delta=0$ 时，相对乘法方向只保留相位因子

$$e^{i\gamma R} = e^{2i\gamma\ell}.$$

本章以下统一采用生成源坐标 $(L_\times, R)$：$L_\times$ 记录总乘法尺度，R 记录互反角色方向。

命题 3.2（乘法壳层偶性）

定义

$$a_n(z) = \sum_{mq=n} m^{-1/2-z}\, q^{-1/2+z}.$$

则

$$\boxed{a_n(z) = a_n(-z)}.$$

证明

映射 $(m,q)\mapsto(q,m)$ 是 $\mathcal{D}_n$ 上的双射。交换求和变量即得结论。证毕。



图 01-04　中心化 Mellin 参数。中心化核把因子交换 $m\leftrightarrow q$ 读成相对角色量 $R\mapsto -R$，并相应表现为 $z\leftrightarrow -z$。在这一变化中，mq 与完整乘法身份保持不变。

4. 全局狄利克雷编码与移动视界

4.0 先说明：有限视界不是近似

本章使用“视界”一词时，不是把 ζ 用有限和近似，也不把尾部当成误差项。相反，视界只是在同一个完整对象内部作精确的首部/尾部重分配：

$$\text{完整对象} = \text{首部} + \text{尾部}.$$

当视界从 r 移到 $r+1$ 时，同一项从 尾部 精确迁入 首部，总和不变。因此后文所谓 移动视界 的核心性质是

$$\boxed{\text{可见部分改变；完整身份不变.}}$$

4.0A 狄利克雷—欧拉 双表示与乘法身份闭包

在进入双 ζ 总编码以前，先固定 ζ 与根乘法身份之间最基本的算术表示关系。在 $\Re s > 1$ 上，

$$\boxed{\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_{p} (1-p^{-s})^{-1}.} \tag{4.0a}$$

左侧按完整整数层读取同一自然数乘法身份；右侧按唯一分解所给出的不可约生成元读取同一身份。由算术基本定理，每个

$$n = \prod_{p} p^{v_p(n)}$$

具有唯一的有限支撑指数族；由绝对收敛，可将局部几何级数

$$\sum_{k\geq 0} p^{-ks}$$

逐素数相乘并重新组织为全部整数项。因此，狄利克雷与欧拉 两种表示在其共同收敛域内精确一致。

在本章的身份语言中，这一恒等式承担两项职责。其一，它表明 ζ 的全局整数表示与 素因子表示 属于同一乘法身份的不同展开；其二，它给出身份可恢复性的一个标准见证：从不可约生成表示可以重新组织出完整整数乘法层，而从完整狄利克雷表示又可以在绝对收敛域内识别同一解析对象。

因此，这里不把欧拉乘积 作为独立的附加条件引入；它来自自然数乘法的不可约分解，并作为乘法身份在 ζ 解析表示中持续在场的一项算术见证。

这一点也给出替身判别的边界。若

$$F(s) = \sum_{n\geq 1} c_n\, n^{-s}$$

具有与 ζ 相似的解析外形、函数方程或 互反对称，仍不能据此判定 F 具有与 ζ 相同的闭包身份。是否属于同一身份闭包，最终取决于它是否保持并可恢复同一个完整乘法生成履历。

4.0B 移动视界与互反角色：相邻截面不是两个固化对象

移动视界与后文的两个 互反角色 并不是彼此独立的两套结构。它们的关系在于：**视界提供过程的推进，互反角色提供同一过程内部的两翼读数。**

为把这一点写清楚，记

$$\mathcal{V}_r(w) := (H_r(w), T_r(w)) \tag{4.0b}$$

为视界 r 下同一个完整解析对象的有限呈现。由精确迁移公式，

$$\mathcal{V}_{r+1}(w) = (H_r(w) + (r+1)^{-w},\ T_r(w) - (r+1)^{-w}). \tag{4.0c}$$

因此，从 r 到 $r+1$ 不是从一个身份跳到另一个身份，而是同一个对象的表示提升：同一项从 尾部 角色 精确转入 首部 角色，完整和保持不变。

若同时考虑

$$w_{\pm}(\tau) = \alpha + \frac{1}{2} \pm z(\tau),$$

则同一个视界迁移同时作用于两翼：

$$\mathcal{V}_r(w_+(\tau)) \to \mathcal{V}_{r+1}(w_+(\tau)), \qquad \mathcal{V}_r(w_-(\tau)) \to \mathcal{V}_{r+1}(w_-(\tau)), \tag{4.0d}$$

并保持

$$w_+(\tau) - w_-(\tau) = 2z(\tau). \tag{4.0e}$$

所以，两个 互反角色 不是两个静止实体等待最后合并；它们是同一个事件在当前视界中的互反两翼，而 移动视界 使这对角色读数整体进入下一事件截面。后文写作中的

$$R_+(E,\tau), \qquad R_-(E,\tau)$$

应当按照这一“动态角色呈现”理解。

如果把相邻生成阶段直观地记成 N 与 $N+1$，也应理解为过程的两个相邻截面，而不是两个并存的独立身份。本章为避免与乘法上界 N 的记号混淆，统一使用

$$r \to r+1$$

表示视界提升。

附录 A 的互反边界表示（boundary avatars）已经把这一动态结构写成精确尺度流：

$$\boxed{(y_+, y_-) \mapsto (a y_+, a^{-1} y_-), \qquad y_+ y_- = 1.} \tag{4.0f}$$

这说明两翼在视界变化中可以改变读数，但互反关系本身保持不变。

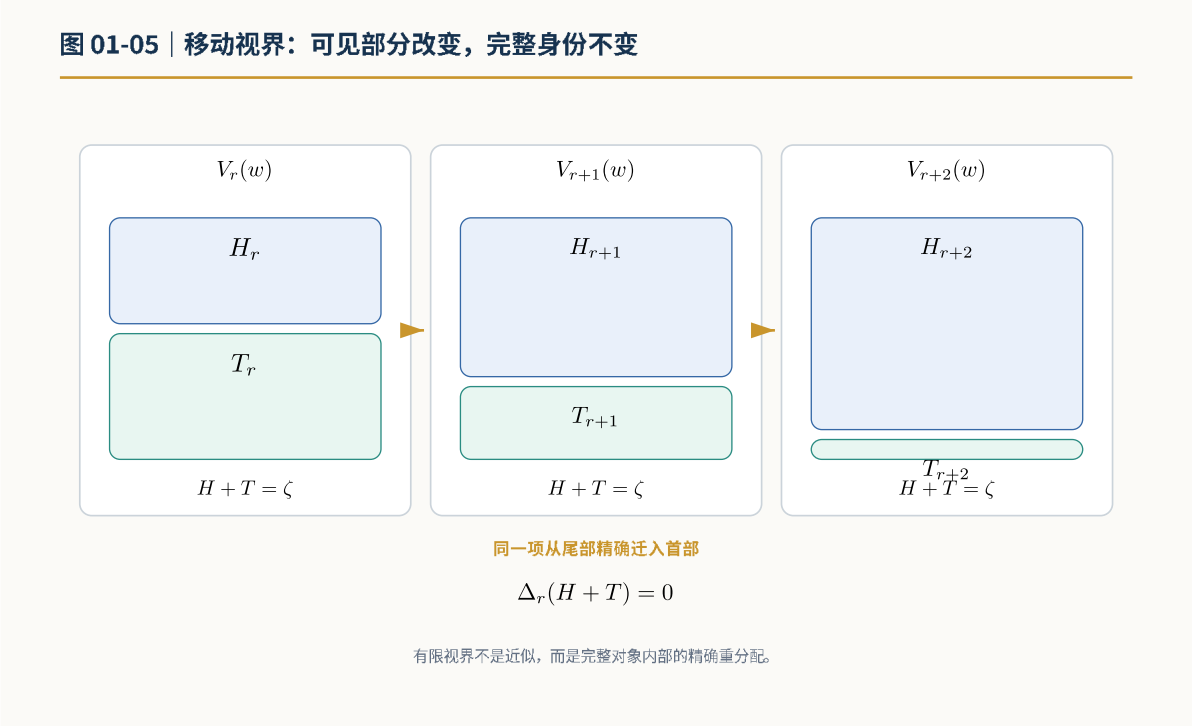


图 01-05　移动视界。 每一个有限视界都是同一个完整解析对象的精确表示：$H_r + T_r = \zeta$。视界推进时，同一项从尾部精确迁入首部，完整和不变，因此这里的有限视界不是近似，而是保持身份的动态重分配。

4.0C 有限动态表达无限：移动视界的更深含义

移动视界的技术价值不仅在于“截断以后没有丢信息”。它还提供了一种精确的有限接口来表达无穷对象。

对每一个有限 r，都有

$$\boxed{\zeta(w) = H_r(w) + T_r(w).} \tag{4.0g}$$

这里 H_r 是有限可见部分，T_r 是精确尾部，而不是被忽略的误差。因此，我们并不是用

$$H_r(w) \approx \zeta(w)$$

逐步逼近一个无穷对象；相反，每一个有限视界

$$\mathcal{V}_r(w) = (H_r(w), T_r(w))$$

都已经是同一个完整对象的精确表示。

随着

$$r \to r+1 \to r+2 \to \cdots,$$

有限可见部分不断生成，尾部同步精确退让，而

$$H_r(w) + T_r(w)$$

这一完整身份始终不变。于是，无穷在这里不是靠某一个有限截面被“固化”为无穷，而是通过一个无界推进的有限视界系统保持其完整身份：

$$\boxed{\mathcal{V}_0 \to \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2 \to \cdots, \qquad H_r + T_r \equiv \zeta.} \tag{4.0h}$$

在标准分析语言中，ζ 当然仍是一个确定的解析对象；这里改变的是它的**呈现方式**。本章的方法把“无限”表达为一族不断推进、每一步都精确的有限呈现，而不是把无限理解为一个必须一次性穷尽的有限清单。

在 GHT 的对象审计语言中，这进一步给出一种解释：无限可以被理解为**无界生成过程中持续同一的身份**。这只是方法论解释，不替代上述标准恒等式；真正承担证明责任的仍然是

$$H_r + T_r = \zeta, \qquad \Delta_r(H + T) = 0.$$

但它说明了为什么 移动视界 不只是一个技术拆分，而是本章处理“有限如何承载无限”的核心结构。

命题 4.1（双 ζ 总编码）

令

$$w_+ = \alpha + \frac{1}{2} + z, \qquad w_- = \alpha + \frac{1}{2} - z.$$

在 $\Re w_\pm > 1$ 的绝对收敛域中，

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} a_n(z) n^{-\alpha} = \zeta\left(\alpha + \frac{1}{2} + z\right)\zeta\left(\alpha + \frac{1}{2} - z\right).}$$

证明

由绝对收敛可交换求和次序：

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} a_n(z) n^{-\alpha} &= \sum_{m,q\geq 1} m^{-\alpha-1/2-z}\, q^{-\alpha-1/2+z} \\ &= \zeta(w_+)\zeta(w_-).\end{aligned}$$

证毕。

命题 4.2（首部/尾部 精确迁移）

定义

$$H_r(w) = \sum_{n\leq r} n^{-w}, \qquad T_r(w) = \zeta(w, r+1).$$

则

$$H_r(w) + T_r(w) = \zeta(w),$$

并且

$$H_{r+1}(w) - H_r(w) = (r+1)^{-w},$$

$$T_{r+1}(w) - T_r(w) = -(r+1)^{-w}.$$

因此

$$\Delta_r(H+T)=0.$$

特别地，若 $\zeta(\rho)=0$，则对任意 r 都有

$$\boxed{H_r(\rho)+T_r(\rho)=0.}$$

命题 4.3（完成函数保持解析参数）

令

$$\mathcal{C}_\xi(w)=\frac{1}{2}w(w-1)\pi^{-w/2}\Gamma(w/2),\qquad \xi(w)=\mathcal{C}_\xi(w)\zeta(w).$$

由于 $\mathcal{C}_\xi(w)$ 与视界参数 r 无关，首部/尾部 的迁移在 完成 后保持同一解析点 w。因此 中心化参数

$$z=\rho-\frac{1}{2}$$

在壳层、双 ζ、首部/尾部与完成之间保持不变。

命题 4.4（中心化参数保真）

设同一解析事件参数为 τ，并令

$$s(\tau)=\frac{1}{2}+z(\tau).$$

则 中心化梅林 核为

$$W_\tau(m,q)=m^{-s(\tau)}q^{-(1-s(\tau))}=(mq)^{-1/2}\exp\left(z(\tau)\log\frac{q}{m}\right). \tag{4.9}$$

固定 n 后，同一个 $z(\tau)$ 进入整个乘法壳层：

$$a_n(z(\tau))=\sum_{mq=n} m^{-1/2-z(\tau)}\,q^{-1/2+z(\tau)}. \tag{4.10}$$

在绝对收敛域中，

$$\sum_{n\geq 1}a_n\,(z(\tau))n^{-\alpha}=\zeta\left(\alpha+\frac{1}{2}+z(\tau)\right)\zeta\left(\alpha+\frac{1}{2}-z(\tau)\right). \tag{4.11}$$

令

$$w_\pm(\tau)=\alpha+\frac{1}{2}\pm z(\tau).$$

这里的 α 只承担狄利克雷总编码中的**共同平移参数**。严格地，

$$w_+(\tau)-w_-(\tau)=2z(\tau), \tag{4.11a}$$

因而

$$\boxed{z(\tau)=\frac{w_+(\tau)-w_-(\tau)}{2}.} \tag{4.11b}$$

改变 α 只使 w_+ 与 w_- 同向平移，并不改变互反中心化参数 $z(\tau)$。因此命题 4.4 传导的是同一个中心化参数 $z(\tau)$，而不是把任意 α 下的 $w_\pm$ 直接认作终端零点坐标。

在 终端零点角色 上，中心化坐标 按

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2} + z(\tau)$$

读取；这里的 $z(\tau)$ 正是前述表示链中保持不变的同一个中心化参数。 则移动视界只改变同一解析点在 首部 与 尾部 之间的分配：

$$\zeta(w_\pm(\tau)) = H_r(w_\pm(\tau)) + T_r(w_\pm(\tau)), \tag{4.12}$$

而

$$H_{r+1}(w_\pm) - H_r(w_\pm) = (r+1)^{-w_\pm},$$

$$T_{r+1}(w_\pm) - T_r(w_\pm) = -(r+1)^{-w_\pm}. \tag{4.13}$$

因此视界迁移不改变 $w_\pm(\tau)$，也不重新参数化 $z(\tau)$。

完成函数

$$\xi(w) = \mathcal{C}_\xi(w)\zeta(w)$$

只在同一个自变量上乘以完成因子 $\mathcal{C}_\xi(w)$，所以同一个 $z(\tau)$ 继续进入

$$\xi(w_+(\tau)), \qquad \xi(w_-(\tau)). \tag{4.14}$$

若某一 零点角色 的 中心化坐标 记为

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2} + z(\tau), \tag{4.15}$$

则严格有

$$\boxed{\rho(\tau) - \frac{1}{2} = z(\tau).} \tag{4.16}$$

于是从梅林核、壳层、双 ζ、首部/尾部到完成与零点坐标， 中心化解析参数始终是同一个 $z(\tau)$；上述各表示之间不存在额外的 $z \mapsto \tilde{z}$ 重参数化。

这里的结论是**解析参数保真**。它不把乘法关系坐标

$$\ell = \frac{1}{2}\log(q/m)$$

与事件提升解析坐标

$$d_E = \Re\rho_{E,+} - \frac{1}{2}$$

数值等同；二者分别属于生成源关系坐标与生成源分辨解析角色坐标。实际零点坐标 d_ρ 只在终端读数上定义。

身份纪律。 命题 4.4 证明的是“换表示，不换中心化解析参数”。它只解决解析身份与参数保真（参数保真），不把两个互反角色的读数强制写成相等。本章始终坚持：

$$\boxed{\text{身份} \neq \text{角色} \neq \text{角色读数.}}$$

这里需要强调：身份同一性一经确定，后面的论证只追踪同一身份中的互反角色如何在解析表示中保持其归属。

5. 互反零点事件与终端读数

完成函数满足

$$\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}, \qquad \xi(s) = \xi(1-s).$$

定义 5.1（同一身份的互反角色表示）

令 E 表示一个事件身份。对每个事件参数 τ，记同一身份内部的两个互反角色位置为

$$R_+(E,\tau), \qquad R_-(E,\tau).$$

它们由同一个 互反作用交换，而不是两个彼此独立的事件对象。

在解析表示层，记这两个角色的位置读数为

$$\rho_{E,+}(\tau), \qquad \rho_{E,-}(\tau).$$

完成函数的反射—实结构把同一互反作用读成

$$\boxed{\rho_{E,-}(\tau) = 1 - \overline{\rho_{E,+}(\tau)}.} \tag{5.1}$$

本章因此把

$$\mathrm{Read}_\tau(E) := \big(\rho_{E,+}(\tau), \rho_{E,-}(\tau)\big)$$

称为事件 E 在该解析表示层的**互反角色读数**。这里 E 本身仍是一个身份；有两个读数不等于有两个身份。

命题 5.2（唯一横向关系量）

存在实函数 $d_E(\tau)$ 与 $\gamma_E(\tau)$，使两个互反角色的中心化读数为

$$\boxed{z_{E,\pm}(\tau) = \pm d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau).} \tag{5.2}$$

由 $\rho = 1/2 + z$，原 s 平面的角色读数为

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_{E,+}(\tau) &= \frac{1}{2} + d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau),\\ \rho_{E,-}(\tau) &= \frac{1}{2} - d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau).\end{aligned}} \tag{5.3}$$

因此

$$\Re\rho_{E,+} + \Re\rho_{E,-} = 1,$$

并且

$$\boxed{\rho_{E,+}(\tau)-\rho_{E,-}(\tau)=2d_E(\tau)\in\mathbb{R}.} \tag{5.4}$$

从而

$$\left|\Re\rho_{E,+}-\frac{1}{2}\right|=\left|\Re\rho_{E,-}-\frac{1}{2}\right|=|d_E|. \tag{5.5}$$

证明

写

$$\rho_{E,+}=\sigma_E+i\gamma_E,\qquad d_E=\sigma_E-\frac{1}{2}.$$

由 (5.1)，

$$\rho_{E,-}=1-\sigma_E+i\gamma_E=\frac{1}{2}-d_E+i\gamma_E.$$

于是

$$\rho_{E,+}-\rho_{E,-}=2d_E,$$

其余结论立即得到。证毕。

关系量纪律。 $2d_E$ 描述的是**同一身份内部两个 互反角色读数 的关系量**。它不是两个身份之间的距离，也不应被解释为两个实体零点之间发生了物理式分离、运动或碰撞。

命题 5.3（事件的解析表示不发生参数替换）

若 E 的零点角色由同一中心化解析参数 $z_E(\tau)$ 表示，则命题 4.4 保证： 从梅林、壳层、狄利克雷、首部/尾部到完成，事件参数 τ 与 中心化参数 $z_E(\tau)$ 均不因表示改变而被替换。

因此

$$d_E(\tau)=\Re z_E(\tau)=\Re\rho_{E,+}(\tau)-\frac{1}{2} \tag{5.6}$$

是同一事件身份在各解析表示中的同一个横向关系读数。

为避免与实际零点坐标混淆，另记

$$d_\rho(\rho):=\Re\rho-\frac{1}{2}.$$

于是 $d_E(\tau)$ 与 d_ρ 属于不同对象类型：前者记录同一身份在有限视界表示中的互反角色关系读数，后者只对完整 ξ 的实际终端零点定义。

定义 5.4（完整对象与终端事件族）

记完整 黎曼 对象为

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

称 $\mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}}$ 为**终端事件族**，若它由完整参数传导过程中**终止于** ξ 的全部互反零点事件组成。换言之，$\mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}}$ 不是任意挑选的事件集合，而是“完整对象 ξ”在事件层面的全部终端读数族。

对每个 $E \in \mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}}$，记

$$\tau_R(E)$$

为该事件在完整开放乘法关系事件分解中的**右端事件截面**。这里 $\tau_R(E)$ 由事件区间的右端点确定，而不是用 $d_E(\tau_R) = 0$ 定义；右端的自对偶闭合性质在第 6 节证明。

在临界带 $0 < \Re s < 1$ 内，完成 因子

$$\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$$

有限且非零，因此

$$Z_{\mathrm{nt}}(\zeta) = Z(\xi) \cap \{0 < \Re s < 1\}. \tag{5.7}$$

由命题 4.4 的精确参数传导，完整开放乘法关系在终端 完成 上的零点读数保持同一个 中心化解析参数 z，且

$$\rho - \frac{1}{2} = z. \tag{5.8}$$

定理 5.5（对象域穷尽与终端读数）

在定义 5.4 的记号下，

$$\boxed{Z_{\mathrm{nt}}(\zeta) = \{\rho_{E,\varepsilon}(\tau_R(E)) : E \in \mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}},\ \varepsilon \in \{+,-\}\}.} \tag{5.9}$$

换言之，事件内部的

$$\rho_{E,\varepsilon}(\tau), \qquad \tau \neq \tau_R(E),$$

属于 生成源分辨 中间解析对象的零点角色；只有

$$\rho_{E,\varepsilon}(\tau_R(E))$$

才是完整 黎曼 对象 ξ 的实际零点读数。

证明

式 (5.7) 给出 ζ 与 ξ 在临界带中的标准零点对应。命题 4.4 保证：从梅林、壳层、狄利克雷、首部/尾部到完成，中心化解析参数始终是同一个 z；因此终端完成不会再生成一套新的零点参数。

另一方面，由定义 5.4，$\mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}}$ 被定义为“终止于 ξ 的全部互反零点事件”。于是 ξ 的每一个实际零点都来自某个终端事件读数，而每个终端事件读数又确实落在 $Z(\xi)$ 中。故

$$Z(\xi) \cap \{0 < \Re s < 1\} = \{\rho_{E,\varepsilon}(\tau_R(E)) : E \in \mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}},\ \varepsilon \in \{+,-\}\},$$

再结合 (5.7)，便得到 (5.9)。证毕。

6. 开放乘法事件律、精确传导与终端闭合

这一节承担本章最后的传导责任。前文已经把“身份闭包”用于表示可恢复性；本节所说的“终端闭合”则专指 互反作用在终端表示层取得 固定角色读数。两者职责不同，需要保持区分：

$$\boxed{\text{终端闭合} \neq \text{两个实体角色的碰撞或合并.}}$$

终端闭合只表示：**同一事件身份中的 互反作用，在终端表示层具有固定角色读数。** 因而本章始终采用

$$\boxed{E_{\text{source}} \equiv E_{\text{analytic}} \equiv E_{\text{terminal}} \quad \text{作为同一个事件履历的不同表示阶段.}} \tag{6.0}$$

这不是额外来源对应，也不是把生成源对象与终端对象重新配对；它只是同一身份在不同表示层的读法。

因此，第 5 节的终端事件族 $\mathfrak{E}_{\text{Riemann}}$ 不是从别处加入的一组零点数据；它是同一开放乘法—解析履历终止于完整对象 ξ 时的全部终端角色读数。本章没有第二个生成源、第二套零点身份或第二条来源链。

定理 6.1（完整开放乘法关系的平方视界事件分解）[E]

对任意整数 $k \geq 1$，考察相邻两个平方截面

$$N = (k+1)^2, \qquad N = (k+2)^2.$$

把二者之间的完整开放乘法关系记为事件区间 I_k。

在左端截面 $N = (k+1)^2$、当前视界 $r = k$ 时，满足

$$m > k, \qquad q > k, \qquad mq \leq (k+1)^2$$

的唯一新双外侧关系为

$$\boxed{(m,q) = (k+1, k+1).} \tag{6.1}$$

在右端截面 $N = (k+2)^2$、下一视界 $r = k+1$ 时，同理唯一新双外侧关系为

$$\boxed{(m,q) = (k+2, k+2).} \tag{6.2}$$

因此，每个完整平方视界事件区间的两个端点都是生成源角色交换

$$J(m,q) = (q,m)$$

的固定角色。

证明

由 $m > k, q > k$ 得

$$m \geq k+1, \qquad q \geq k+1,$$

故 $mq \geq (k+1)^2$。与 $mq \leq (k+1)^2$ 合并，得到

$$m = q = k+1.$$

右端同理。于是两个端点都满足 $J(m,q)=(m,q)$。证毕。

坐标说明。 归一化坐标中，这些固定角色满足 $u=v=1/2$。这只说明生成源角色几何的固定性。特别地，在 $m=q=S$ 时，

$$W_z(S,S)=S^{-1} \qquad (\forall z),$$

所以不能把 $m=q$、$\ell=0$ 或生成源的 $1/2$ 直接数值等同为 $\Re z=0$。本章始终保持这一坐标区分，以避免把不同层次的坐标混同。

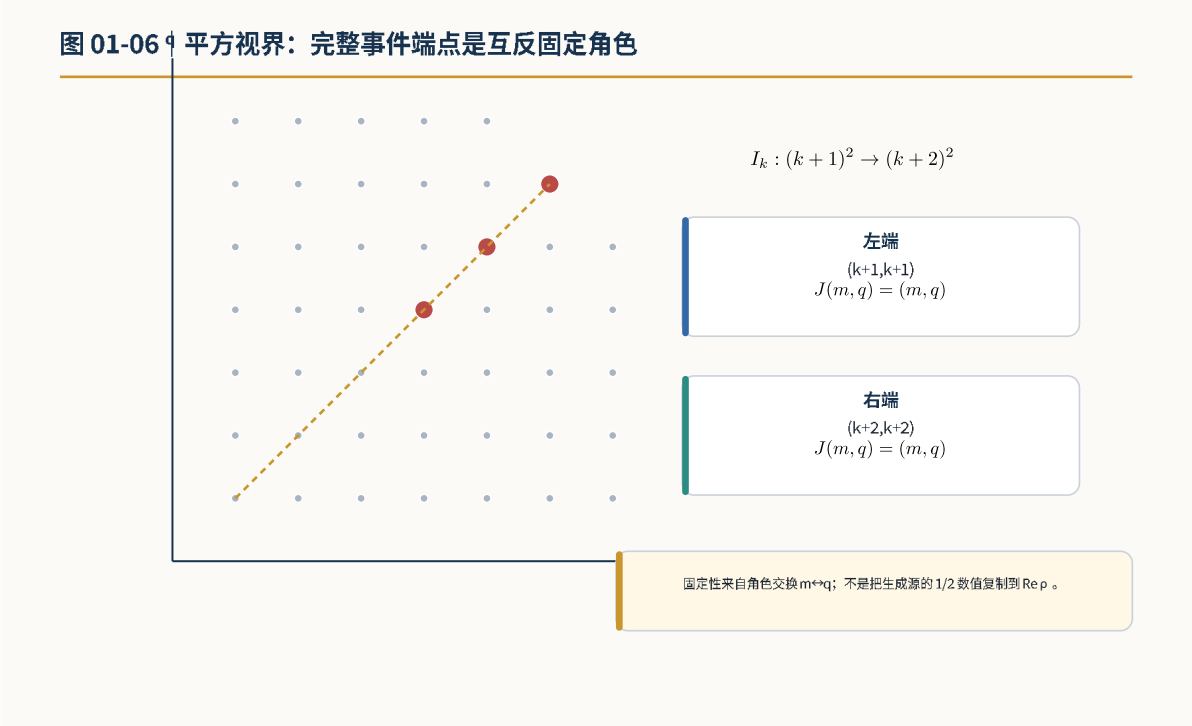


图 01-06　平方视界。 在相邻平方截面之间，完整事件的端点唯一落在对角角色 $(k+1,k+1)$ 与 $(k+2,k+2)$ 上，因此都是交换 $m\leftrightarrow q$ 的固定角色。这里的固定性属于生成源角色几何，不是把生成源坐标的 $1/2$ 数值搬运到 $\Re\rho$。

定义 6.2（一个事件身份的分层读法）

令 E 表示一个完整互反事件身份，R 表示该身份内部的一个角色位置，J_E 表示同一身份内部的 互反角色 作用。生成源层与解析层不是两套事件，而是对同一个 (E,R) 的不同读法。

在生成源表示层，角色读数记为

$$x_E(\tau;R),$$

并满足

$$x_E(\tau;J_ER)=J\,x_E(\tau;R), \qquad J(m,q)=(q,m).$$

在解析表示层，角色读数记为

$$\rho_E(\tau;R),$$

而同一互反作用的解析读法为

$$\rho_E(\tau;J_ER)=1-\overline{\rho_E(\tau;R)}. \tag{6.3}$$

因此本章固定

$$\boxed{\text{身份}\neq\text{角色}\neq\text{角色读数},} \tag{6.4}$$

并进一步固定：

$$\boxed{\text{换表示，只改变同一身份/同一角色的读法；不制造新的身份或新的角色来源.}} \tag{6.5}$$

特别地，所谓“固定角色”是指 $J_ER=R$；它是同一身份内部的角色性质，不是两个角色实体合并以后产生的第三个对象。

图 01-07｜身份、角色、角色读数：三层不能混同



图 01-07　身份、角色、角色读数。一个完整事件身份 E 可以包含互反角色 R 与 J_ER，同一角色又可在生成源层和解析层获得不同读数。换表示只改变读法，不制造新的身份或新的角色来源。

定理 6.3（互反事件—中心化参数双保真精确传导定理）[E]

对任意完整互反事件身份 E，第 3–5 节建立的表示链不是不同对象之间的桥，而是同一个身份的确定性表示展开：

$$\boxed{\begin{aligned}E\to W_{E,\tau}\to a_n(z_E(\tau))\to\\ \zeta(w_{E,+}(\tau))\zeta(w_{E,-}(\tau))\to(H_r,T_r)\to\xi\to\\ \rho_E(\tau;R).\end{aligned}} \tag{6.6}$$

沿这一链同时保持三件事：

1. **事件身份保真。** 根身份始终是自然数乘法 $\mathfrak{I}_\times$；开放乘法关系 $\mathcal{R}_\times$ 是其关系表示。视界切分、壳层求和、狄利克雷/欧拉编码、首尾重分配与完成函数都在同一乘法身份的表示履历内进行，不加入第二独立生成身份。
2. **参数保真。** 同一个中心化解析参数 $z_E(\tau)$ 不被重置或重新参数化：

$$z_{\text{Mellin}} = z_{\text{shell}} = z_\zeta = z_{\text{head/tail}} = z_\xi = \rho_E(\tau; R) - \frac{1}{2}. \tag{6.7}$$

3. **互反角色保真。** 互反作用始终作用在同一个事件身份内部。若 $R \mapsto J_E R$ 是身份 E 内的角色交换，则其终端解析读法为

$$\boxed{\rho_E(\tau; J_E R) = \iota(\rho_E(\tau; R)), \qquad \iota(\rho) = 1 - \overline{\rho}.} \tag{6.8}$$

式 (6.8) 是**同一身份在不同表示层的角色读法一致性**，不是一个 生成源对象 到 终端对象 的额外来源映射。

4. **身份闭包。** 前三项保真不仅要求局部符号保持一致，还要求成熟表示仍属于同一个乘法身份的可恢复闭包。关系表示、素数/唯一分解、狄利克雷/欧拉表示提供算术侧的恢复见证；中心化梅林、壳层与首部/尾部精确重分配保持同一个参数化解析对象；完成化在同一解析变量上登记完成结构。因而本章所谓“身份持续在场”，具体指这些表示没有把原乘法身份替换为另一个生成身份，并且完整表示履历仍保留回到 $\mathfrak{I}_\times$ 的恢复责任。

特别地，第 5 节定义的 $\mathfrak{C}_{\text{Riemann}}$ 正是这一同一履历终止于 ξ 时的全部事件身份及其终端角色读数；所谓“终端来源穷尽”只是同一对象域的完备性陈述。

证明

命题 3.1–3.2 给出中心化梅林表示与乘法壳层互反；命题 4.1 把同一个 $z_E(\tau)$ 写入双 ζ 参数；命题 4.2 证明移动视界只在 H_r 与 T_r 之间精确重分配同一解析对象；命题 4.3–4.4 证明完成函数不改变解析参数；命题 5.3 再次确认表示变化不发生参数替换。结合第 4.0A 节的狄利克雷—欧拉 双表示，关系层、不可约生成层与全局解析层仍由同一乘法结构组织；故身份与中心化参数在整条表示链中不被替换，并保持本章所要求的身份闭包责任。

互反角色方面，生成源的 $m \leftrightarrow q$ 只交换同一乘法身份内部的角色位置；在中心化核与壳层表示中，这一互反结构被保持；完成函数的反射—实结构把同一互反作用在终端表示中读成 $\rho \mapsto 1 - \overline{\rho}$。因此 (6.8) 描述的不是两套事件之间的匹配，而是同一个 (E, R) 在不同表示层中的一致读法。三项保真同时成立。证毕。

逻辑边界。 定理 6.3 不声称乘法内部坐标

$$\ell = \frac{1}{2}\log\frac{q}{m}$$

与解析零点横向坐标 $\Re\rho - 1/2$ 数值相等，也不使用 $m = q \Rightarrow z = 0$ 这一错误推论。它保持的是 身份、角色与角色读数 的归属关系，而不是把不同层次的坐标数值强行相等。

引理 6.3A（终端互反角色的固定角色识别）[E]

设

$$E \in \mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}}$$

为任意完整终端事件，$\tau_R(E)$ 为定义 5.4 的右端事件截面。记该事件在右端截面的两个互反角色为

$$R_{E,+}(\tau_R), \qquad R_{E,-}(\tau_R) = J_E R_{E,+}(\tau_R).$$

则二者在角色层并不是两个不同角色，而是同一个生成源固定角色：

$$\boxed{R_{E,+}(\tau_R) = R_{E,-}(\tau_R) = R_E.} \tag{6.8a}$$

因此终端解析读数满足

$$\boxed{\rho_{E,+}(\tau_R) = \rho_E(\tau_R; R_E) = \rho_{E,-}(\tau_R).} \tag{6.8b}$$

进而定理 5.5 的终端对象域可以等价地写成

$$\boxed{Z_{\mathrm{nt}}(\zeta) = \{\rho_E(\tau_R(E); R_E) : E \in \mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}}\}.} \tag{6.8c}$$

证明

由定义 5.4，$\tau_R(E)$ 是该完整开放乘法事件在平方视界事件分解中的右端截面。设其对应右端平方截面为

$$N = S^2.$$

定理 6.1 已经证明，在这一右端截面上唯一的新双外侧因子关系满足

$$(m, q) = (S, S).$$

事件的两个互反角色正由

$$(m, q) \quad 与 \quad (q, m)$$

给出。因此在右端截面

$$(m, q) = (q, m),$$

即互反作用不再改变角色位置。于是

$$R_{E,+}(\tau_R) = R_{E,-}(\tau_R) = R_E,$$

得到 (6.8a)。

定义 6.2 中

$$\rho_E(\tau; R)$$

是同一个事件身份中角色 R 在解析表示层的读数。既然右端两个互反标签在角色空间中已经指向同一个 R_E，同一读数映射对同一角色只能给出同一个值，因此

$$\rho_{E,+}(\tau_R) = \rho_E(\tau_R; R_E) = \rho_{E,-}(\tau_R),$$

得到 (6.8b)。

最后，定理 5.5 已经给出

$$Z_{\mathrm{nt}}(\zeta) = \{\rho_{E,\varepsilon}(\tau_R(E)) : E \in \mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}},\ \varepsilon \in \{+,-\}\}.$$

由 (6.8b)，对每个固定 E，集合中的 $+$ 与 $-$ 两个终端角色标签在右端截面都读成同一个固定角色 R_E。因此上式立即压缩为 (6.8c)。证毕。

对象说明。 (6.8a) 不是“两个实体在终端碰撞”。它只表示互反对合在事件右端作用于一个固定角色，因此 $+$ 与 $-$ 两个角色标签在角色空间中指向同一个元素。式 (6.8b) 只是这一角色同一性在解析读数层的函数性结果。

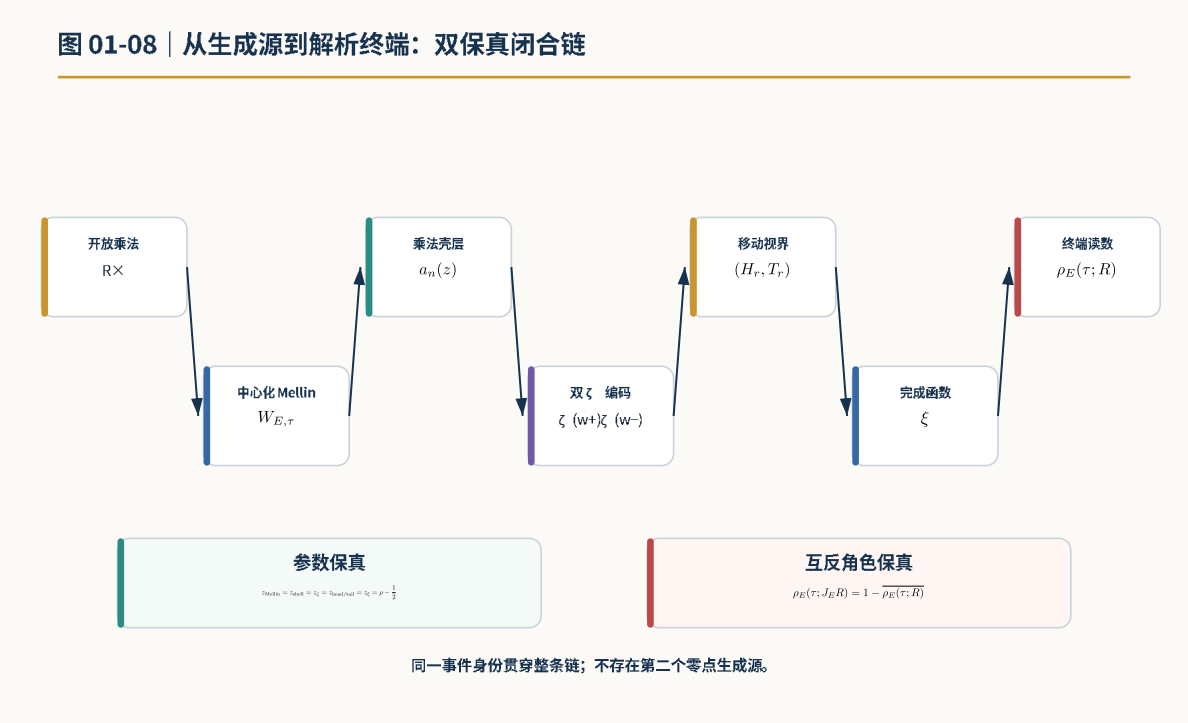


图 01-08　从生成源到解析终端的双保真闭合链。开放乘法关系、中心化 Mellin、乘法壳层、双 ζ 编码、移动视界、完成函数与终端读数属于同一个事件身份的确定性表示展开。链条同时保持中心化参数与互反角色，不引入第二个零点生成源。

定理 6.4（终端固定角色读数）[E]

设 $E \in \mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}}$，令 R_E 为其完整平方视界右端的生成源固定角色。由定理 6.1，

$$J_E R_E = R_E. \tag{6.9}$$

由定理 6.3 的互反角色保真，同一个角色 R_E 在终端解析表示中的读数满足

$$\rho_E(\tau_R; J_E R_E) = \iota(\rho_E(\tau_R; R_E)). \tag{6.10}$$

结合 $J_E R_E = R_E$，得到

$$\boxed{\rho_E(\tau_R; R_E) = 1 - \overline{\rho_E(\tau_R; R_E)}.} \tag{6.11}$$

于是

$$\boxed{\Re\rho_E(\tau_R;R_E)=\frac{1}{2}.} \tag{6.12}$$

证明

式 (6.9) 说明：在生成源平方视界右端，互反作用对同一身份中的角色 R_E 不再改变其角色位置。定理 6.3 保证角色归属在换表示时不被替换，并且同一互反作用在终端解析层读作 $\iota(\rho)=1-\overline{\rho}$。因此，终端读数必须是 ι 的固定读数，即满足 (6.11)。取实部得到 (6.12)。证毕。

这里不存在“两个角色先分离、最后再合并”的本体过程。固定性属于同一个事件身份中的角色作用；$\rho=1-\overline{\rho}$ 是该固定角色在终端解析表示中的读数方程。最后的 $1/2$ 因而来自解析互反固定点方程，而不是从生成源坐标中的 $1/2$ 作数值复制。

6.5 一个完整事件的角色读数图景

同一个事件身份 E 在中间解析表示中可以具有两个 互反角色读数：

$$\rho_{E,\pm}(\tau)=\frac{1}{2}\pm d_E(\tau)+i\gamma_E(\tau). \tag{6.13}$$

当 $d_E(\tau)\neq 0$ 时，这只表示同一身份的两个角色位置在该表示层具有不同读数。二者的关系量为

$$\boxed{\rho_{E,+}(\tau)-\rho_{E,-}(\tau)=2d_E(\tau).} \tag{6.14}$$

这不是两个身份之间的距离，也不是两个实体零点沿某条物理轨迹彼此靠近。

在终端固定角色 R_E 上，互反作用不再改变角色位置。其解析读数满足

$$\iota(\rho_E)=\rho_E,$$

故相应的横向关系读数为

$$\boxed{d_E(\tau_R(E))=0.} \tag{6.15}$$

如果把这一表示变化画成示意图，可以压缩写成

$$0\to d_E(\tau)\to 0, \tag{6.16}$$

或

$$\frac{1}{2}\to\left(\frac{1}{2}+d_E(\tau),\frac{1}{2}-d_E(\tau)\right)\to\frac{1}{2}. \tag{6.17}$$

但必须严格理解：箭头表示**同一身份在不同事件截面/表示阶段的角色读数变化**，不是两个实体从两侧运动后发生碰撞、汇合或合并。

因此，图形语言只承担表示层直观说明；定理 6.4 的证明责任完全由“固定角色 + 角色保真 + 终端解析固定点方程”承担。

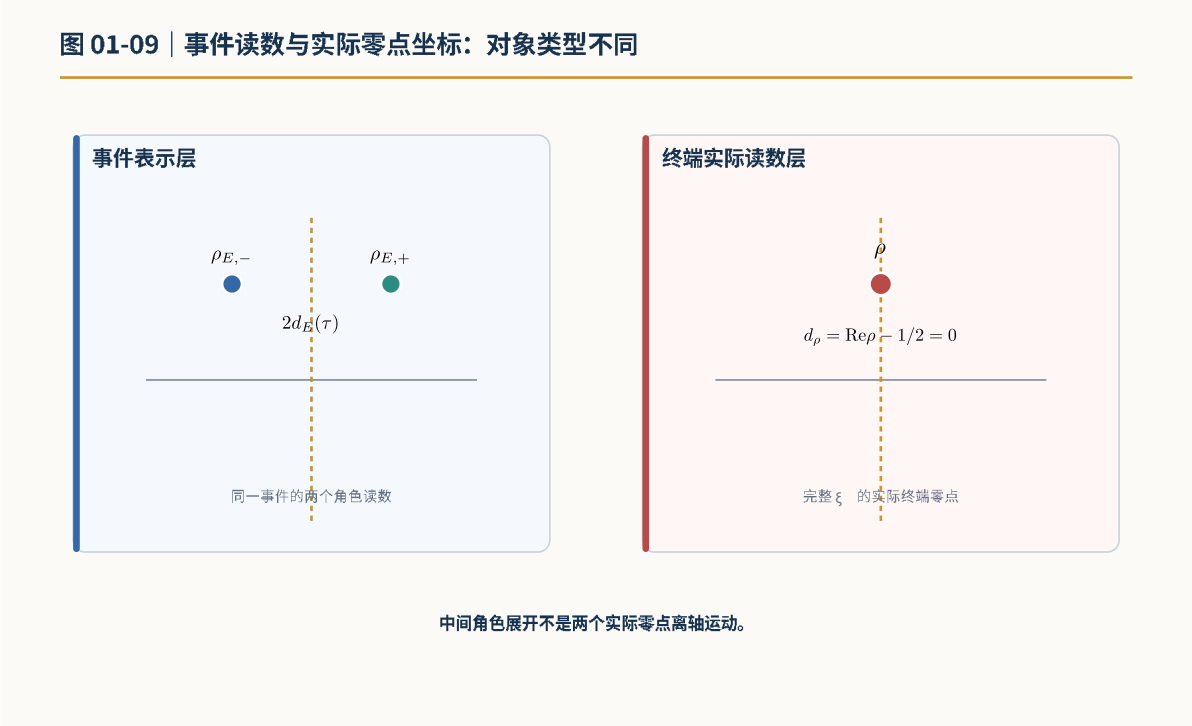


图 01-09　事件内部角色读数与实际零点横向坐标的类型区分。 中间表示中的 $\rho_{E,\pm}(\tau) = \frac{1}{2} \pm d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau)$ 是同一事件身份的两个角色读数；它们不是完整 ξ 的两个实际离轴零点。终端实际零点的横向坐标是 $d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2}$，由固定角色读数得到 $d_\rho = 0$。

7. 主定理

定理 7.1（非平凡零点的临界线结论）[E]

对每一个非平凡黎曼零点 ρ，有

$$\boxed{\Re\rho = \frac{1}{2}.}$$

证明

任取

$$\rho \in Z_{\mathrm{nt}}(\zeta).$$

由定理 5.5 与引理 6.3A，存在

$$E \in \mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}}$$

使

$$\boxed{\rho = \rho_E(\tau_R(E); R_E).} \tag{7.1}$$

这里不需要再把一个实际零点事后配回某个生成源固定角色。定理 5.5 已经穷尽全部终端零点事件，而引理 6.3A 证明：每个终端事件的 $+/-$ 两个互反角色标签在平方视界右端本来就是同一个固定角色 R_E。因此终端对象域已经等于固定角色终端读数对象域。

由定理 6.4，

$$\Re\rho_E(\tau_R(E);R_E)=\frac{1}{2}. \tag{7.2}$$

代入 (7.1)，得到

$$\Re\rho=\frac{1}{2}.$$

由于 ρ 任意，结论覆盖全部非平凡零点。证毕。

逻辑说明。 本定理不增加第二个零点数据源，也不调用任何谱算子作为证明输入。证明只使用本章定义的完整对象 ξ、终端事件族的对象域穷尽，以及同一事件履历的双保真精确传导。

图 01-10｜第一章证明闭合图

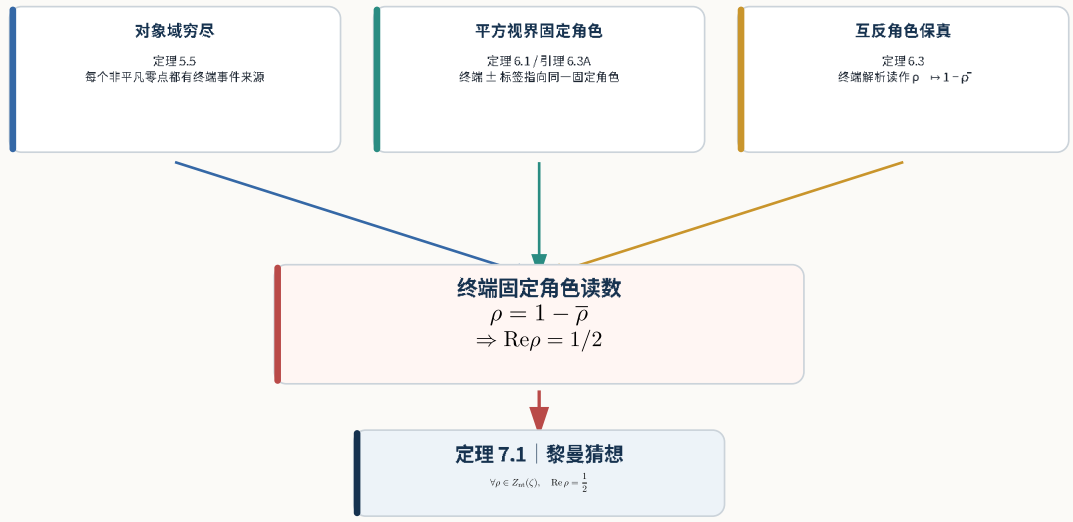


图 01-10　第一章证明闭合图。定理 5.5 提供非平凡零点对象域的终端来源穷尽；定理 6.1 与引理 6.3A 把终端互反标签识别为同一个固定角色；定理 6.3 保持互反角色在解析层的忠实读数。三者在定理 6.4 汇合为 $\rho=1-\overline{\rho}$，并由定理 7.1 得到全部非平凡零点满足 $\Re\rho=\frac{1}{2}$。

8. 事件内部的互反角色读数展开不等于实际零点离轴

定理 7.1 关闭的是完整对象 ξ 上实际终端零点的横向坐标

$$d_\rho=\Re\rho-\frac{1}{2}.$$

它并不要求有限视界事件表示中的关系坐标

$$d_E(\tau)$$

在整个事件履历中恒为零。

当

$$d_E(\tau) \neq 0$$

时，可以写出同一身份的两个 互反角色读数：

$$\rho_{E,\pm}(\tau) = \frac{1}{2} \pm d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau).$$

这里必须保持类型纪律：$\rho_{E,+}(\tau)$ 与 $\rho_{E,-}(\tau)$ 是同一事件身份在中间解析表示中的两个角色读数，**不是两个独立身份，也不是完整 ξ 的实际零点除子**。

二者之间的横向量

$$\rho_{E,+}(\tau) - \rho_{E,-}(\tau) = 2d_E(\tau)$$

是同一身份内部的角色关系量。它可以随事件参数改变，但这不应被本体化解释为两个实际零点实体的横向运动。

在终端固定角色读数

$$\tau = \tau_R(E)$$

处，定理 6.4 给出

$$\iota(\rho_E) = \rho_E,$$

等价于

$$\boxed{d_\rho = 0.}$$

因此，“中间表示中存在 互反双角色读数”与“完整黎曼对象的实际终端零点位于临界线”并不矛盾：前者属于表示层，后者属于终端实际读数层。

8.1 两个技术亮点的最小总结

为了避免本章的技术贡献被主定理遮蔽，这里把方法压缩成两个可以独立复用的结构。

A. 移动视界作为精确重分配

$$H_r(w) + T_r(w) = \zeta(w), \qquad \Delta_r(H + T) = 0.$$

有限视界不是截断误差分析，而是一种保持身份的精确切分。更重要的是，视界 $r \to r+1$ 给出同一事件的动态提升：同一项从 尾部 角色 转入 首部 角色，两翼 互反读数 随同一视界同步进入下一表示截面，而完整对象不变。因此，有限视界既是角色动态的载体，也是无限对象的精确有限接口。它用不断生成的有限呈现承载完整无穷身份，而不需要把每个有限窗口误认成新的对象。

B. 单一身份、身份闭包与互反角色保真

全书只有一个根乘法身份：

$$\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq.$$

开放乘法关系、素数/唯一分解、狄利克雷/欧拉表示、首尾视界、壳层、完成函数和终端零点读数，都在这一根身份的表示履历中组织，不构成新的生成身份。最简洁的结构是

$$\boxed{\text{一个根身份} + \text{一个事件履历} + \text{一个中心化参数} + \text{多种忠实表示}.}$$

“身份保真”要求各表示层不发生 身份替换；“身份闭包”进一步要求成熟压缩表示仍可无损展开、恢复或认证为同一个完整乘法身份；“终端闭合”则专指 固定角色读数，而不是两个实体的合并。三者分别承担身份连续性、可恢复性与终端固定读数的证明职责。

9. 结论

本章的证明并不把黎曼猜想理解为一个孤立零点为什么“选择” $1/2$ 的问题，而是把它放回一条完整的生成—表示履历中。本章真正追踪的是同一个自然数乘法身份：它如何在关系、不可约分解、狄利克雷/欧拉、梅林、壳层、移动视界、完成化与 终端零点读数中不断改变表示，同时保持身份、参数与 互反角色归属 的一致性。

从这一角度看，最容易造成额外困难的并不是公式本身，而是对象层级被切断以后重新制造出来的解释债务。一个没有来源要求的裸结果，并不会自动产生“为什么如此”的问题；当一个本来由明确关系生成的结果被从履历中切离、重新对象化以后，人们才会在终端重新寻找它的来源。本章因此始终把零点读数放回其乘法—解析履历中考察，而不是把它当作无来源的裸复数。

这一履历可以从三个层次理解。

第一，**身份始终同一。** 根身份是

$$\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq.$$

$\mathcal{R}_{\times} = \mathrm{Graph}(\mu)$ 是关系表示，素数与唯一分解给出不可约生成表示，狄利克雷与欧拉给出全局与不可约的解析读法。进入梅林、壳层、ζ、ξ 与终端零点以后，变化的是表示形式与角色读数，而不是生成身份本身。

第二，**表示不断展开并逐层收束。** 这一点可以用“漏斗”作为直观图景：同一个身份不断进入新的表示条件，能够自由变化的部分逐层减少，但只要每一层仍属于同一个 身份闭包，经过筛分的仍是同一个身份。平方视界给出生成端 固定角色；互反角色保真 保证该角色归属在换表示时不被重新配对；终端 互反作用读作

$$\iota(\rho) = 1 - \overline{\rho}.$$

因此固定角色的终端读数满足

$$\rho = 1 - \overline{\rho},$$

从而

$$\boxed{\Re\rho = \frac{1}{2}.}$$

这里的 $1/2$ 不是从源端复制到终端，而是同一个互反固定关系 在终端解析表示中的唯一 固定角色读数。

第三，**闭包意味着身份仍可恢复。** 本章区分终端闭合与身份闭包：终端闭合是 固定角色读数；身份闭包则要求高度压缩的成熟表示仍能无损展开、恢复或认证为同一个完整乘法身份。二者共同说明：终端读数虽然高度压缩，但其生成履历并未因此被删除。

技术上，移动视界的精确重分配保证有限视界只改变可见分配而不更换完整对象；中心化参数保真保证 z 不在梅林、壳层、双 ζ、首部/尾部与完成化 之间被重置；事件身份纪律

$$E_{\text{source}} \equiv E_{\text{analytic}} \equiv E_{\text{terminal}}$$

保证 生成源、解析 与 终端 不是后来重新配对的三个对象；终端对象域则承担全部实际非平凡零点的覆盖责任。局部公式的作用，正是在这些节点上逐层关闭全局证明责任。

因此，本章的核心不是“公式越多越接近答案”，而是每一个公式都必须回到同一个全局问题：**这一层到底保留了什么？** 如果身份仍然同一、角色归属没有更换、参数没有重置、压缩仍然闭包，那么最终出现的 固定角色读数 就不是一个突然冒出的数值条件，而是整条履历收束后的终端读法。

从对象层看，可以把本章压缩为

> **身份始终同一，表示不断展开并逐层收束； 角色随关系显现，读数随表示改变； 对象是履历的压缩，履历是对象的展开； 可无损恢复者构成身份闭包，闭包意味着身份持续在场。**

这一结构在本书后续章节中还会从另一侧展开。第六章（H06）《RH 任毅飞算子：乘法身份、解析延拓与规范谱之间的无损桥梁》引入任毅飞算子，从高度压缩的解析/谱对象逆向恢复并展开乘法身份；它不是为终端对象另造来源，而是验证压缩以后身份仍可返回根部。第九章（H09）《黎曼猜想的另一条闭合路径：开放乘法身份与 Hilbert–Pólya 独立谱路线——从开放乘法身份到 source-generated 自伴谱与规范终端相认》则保持独立性，从同一个根乘法身份出发，构造 源生成 的自伴谱路线。第七章（H07）《黎曼谱见证定理：任毅飞规范谱见证的唯一性与 希尔伯特－波利亚身份传递》位于谱身份的见证与相认层，对规范谱所承载的 黎曼身份承担唯一性与认证责任。

三者的分工可以概括为：

H06:	从压缩对象逆向恢复并展开乘法身份；
H09:	从乘法身份独立构造源生成自伴谱；
H07:	对规范谱承担 黎曼身份见证、唯一性与相认。

这三篇不作为本章主定理的证明输入，但它们把“闭包”的意义扩展得更完整：**压缩之后能够恢复；身份一旦恢复，仍可沿其他合法道路重新展开。** 因而真正持续在场的不是某一种固定公式或某一条固定路径，而是能够在不同表示道路之间保持可认证同一性的根身份。

由此，本章最后的 $1/2$ 应当被理解为完整 互反履历 在 终端固定角色表示 中的压缩读数。它不是一个孤立数字包含了全部乘法信息，而是同一个乘法身份经过多层表示收束以后，在终端解析层留下的固定位置。

附录 A.有限视界的互反边界几何

设

$$E_N(r)=\left\{m>r:\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor>r\right\}=\left\{r<m\le\left\lfloor\frac{N}{r+1}\right\rfloor\right\}.$$

对 双外侧有序对

$$m>r,\qquad q>r,\qquad mq\le N$$

定义边界比率

$$y_+(N,r)=\frac{\lfloor N/(r+1)\rfloor}{r+1},$$

$$y_-(N,r)=\frac{r+1}{\lfloor N/(r+1)\rfloor}.$$

于是

$$y_+(N,r)y_-(N,r)=1.$$

若 $E_N(r)$ 与 $E_N(r+1)$ 均非空，定义

$$a(N,r)=\frac{(r+1)\lfloor N/(r+2)\rfloor}{(r+2)\lfloor N/(r+1)\rfloor}.$$

则

$$y_+(N,r+1)=a(N,r)y_+(N,r),$$

$$y_-(N,r+1)=a(N,r)^{-1}y_-(N,r).$$

因此有限视界的互反边界表示（边界表示）满足精确的互反尺度流

$$(y_+,y_-)\mapsto(ay_+,a^{-1}y_-).$$

当

$$N=S^2,\qquad r=S-1$$

时，

$$y_+ = y_- = 1,$$

唯一剩余角色为

$$(S, S),$$

其归一化固定读数为 $1/2$。

第二章　Riemann 零点间隔的视界形状几何

——边界解析芽、全局谱确定与有限阶 Jet 间隔界

读者导览：从一个间隔到整个实零点谱

传统的零点间隔研究首先记录相邻零点之间的长度

$$\Delta_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k.$$

本章保留这一尺度，但进一步研究：**相同的间隔长度是否必然对应相同的区间内部解析结构？**答案是否定的。对每个相邻零点区间，本章构造一个规范相位密度 p_k。于是一个间隔 不再只由“长度”刻画，而同时携带区间内部的相位推进、两端解析重数、共享边界的解析芽，以及其余全部零点对该区间产生的全局谱响应。

核心结构出现在零点边界。对数导数 $-\Xi'/\Xi$ 在零点处具有极点；引入互反边界坐标

$$R_k(x) = -\frac{1}{M_k(x)}$$

后，该极点被消去，共享零点重新成为普通解析边界点。由此可证明：左右两个相邻间隔 在共享零点处共享的不只是端点位置或有限阶导数，而是经过尺度归一化后的**完整边界解析芽（boundary analytic germ）**。

这一边界解析芽的 Taylor 系数进一步生成相对于当前零点的全局逆距离谱矩。把这些矩组织成一个有限、紧支撑正测度后，可以唯一恢复全部其他实零点的位置与解析重数。因此，在本章固定的实零点谱框架中，得到

> 一个零点位置 + 一个相邻间隔尺度 + 该零点一侧的完整边界解析芽 ⇒ 整个实零点谱及其解析重数.

这是一条精确解析数据意义下的全局唯一确定性结论，而不是“局部像全局”的比喻。

有限阶信息同样具有严格内容。若只知道有限阶边界 jets，虽然不能恢复整个谱，却已经能够建立最近邻距离的上下夹逼，并通过残余矩判断相邻间隔比当前间隔更短、等长还是更长。可以把这一层级概括为：

> 有限 jet 给确定性界；完整 germ 给全局唯一性。

本章在 RH 系列中的逻辑位置必须同时写清：本章**不重新证明 RH**。第一章（H01） 已把非平凡零点闭合到临界线；本章以由此得到的 Riemann 实零点谱为输入，研究其局部—全局解析几何。本章也**不假设全部零点为简单零点**：标准解析重数 m_k 始终保留为谱数据。第三章（H03）负责进一步区分 distinct zero address、表示叶数与 analytic multiplicity；本章只研究解析重数如何被 horizon shape 读取并进入全局重建。

摘要

本章考察 Riemann 完成函数

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

在非平凡零点已经构成可排序实零点谱的前提下，相邻零点区间所携带的规范解析几何，并在该实谱上建立逐间隔的局部—全局确定结构。解析重数作为独立谱数据保留。

设不同实零点按严格递增次序写为 $\{\gamma_j\}$，解析重数为 m_j，并固定相邻区间

$$I_k = (\gamma_k, \gamma_{k+1}), \qquad \Delta_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k.$$

定义亚纯 Herglotz 响应

$$m(z) = -\frac{\Xi'(z)}{\Xi(z)},$$

无量纲区间响应

$$M_k(x) = \Delta_k m(\gamma_k + \Delta_k x), \qquad 0 < x < 1,$$

以及规范相位密度

$$p_k(x) = \frac{1}{\pi}\frac{M_k'(x)}{1 + M_k(x)^2}.$$

首先证明 $p_k(x)\,dx$ 是概率测度，且 p_k 完整决定 M_k。其端点值精确读取解析重数：

$$p_k(0^+) = \frac{1}{\pi m_k}, \qquad p_k(1^-) = \frac{1}{\pi m_{k+1}}.$$

本章的核心边界坐标为

$$R_k(x) := -\frac{1}{M_k(x)} = \tan\left(\pi \int_0^x p_k(u)\,du\right).$$

它消除了 m 在零点处的极点。若 γ_k 是左右两个相邻区间的共享零点，则对每个 $n \geq 1$，有全阶尺度归一化拼接律

$$\Delta_{k-1}^{1-n} R_{k-1}^{(n)}(1^-) = \Delta_k^{1-n} R_k^{(n)}(0^+).$$

因此，相邻间隔 在共享零点处共享同一个互反 Herglotz 边界解析芽，而不仅是有限阶边界数据。

进一步定义

$$Q_k(x) = \frac{x}{R_k(x)}.$$

其左端展开为

$$Q_k(x) = m_k - \sum_{r\geq 1} C_{k,r}\, x^r,$$

其中

$$C_{k,r} = \sum_{j\neq k} m_j \left(\frac{\Delta_k}{\gamma_j - \gamma_k}\right)^r.$$

对 $r \geq 2$ 该和绝对收敛。由

$$\nu_k^{\mathrm{gap}} = \sum_{j\neq k} m_j \left(\frac{\Delta_k}{\gamma_j - \gamma_k}\right)^2 \delta_{\Delta_k/(\gamma_j-\gamma_k)}$$

得到有限、紧支撑正测度，其第 n 阶矩恰为 $C_{k,n+2}$。紧支撑矩问题的确定性遂给出本章主定理：固定一个零点位置 γ_k、一个相邻间隔尺度 Δ_k 与该零点一侧的完整边界解析芽，即可唯一恢复全部不同实零点及其解析重数。

有限阶边界 jets 则产生 Euler–Rayleigh 型最近邻间隔界。例如若

$$d_k = \min_{j\neq k} |\gamma_j - \gamma_k|,$$

则

$$\frac{\Delta_k}{C_{k,2r}^{1/(2r)}} \leq d_k \leq \Delta_k \sqrt{\frac{C_{k,2r}}{C_{k,2r+2}}},$$

且两端均趋于 d_k。扣除当前区间另一端的已知原子后，还得到残余矩三分律，从单侧高阶 boundary jets 判定相邻间隔 相对于当前间隔 的短、等、长三种情形。

亚纯 Herglotz / meromorphic-inner 理论、紧支撑矩问题的确定性以及 Euler–Rayleigh 型逆幂和界构成本章的经典基础；在逐个 Riemann 零点间隔的规范形状坐标中，它们组成

规范相位密度 → 互反边界解析芽 → 全局谱矩 → 紧支撑正测度 → 全局实零点谱

这一确定性局部—全局链。

0. 本章位置、前置输入与对象边界

0.1 前置输入：RH 闭合后的实零点谱

全书在此处的逻辑箭头为

第一章（H01）的 RH 闭合 ⇒ Riemann 实零点谱 ⇒ 本章的间隔形状几何. (0.1)

后续定理均在“Ξ 的相关非平凡零点已经形成可排序实零点谱”这一前置框架下建立。

0.2 零点地址与解析重数

本章始终区分：

$$\boxed{\text{distinct zero address} \neq \text{analytic multiplicity.}} \tag{0.2}$$

不同零点位置写为 γ_j，相应解析重数写为

$$m_j = \operatorname{ord}_{\gamma_j} \Xi \in \mathbb{N}.$$

本章不假设 $m_j = 1$。第三章（H03） 进一步处理零点地址、表示叶数与解析重数的层级分离；本章只使用标准解析重数本身，并证明其能够由 间隔边界形状 精确读取。

0.3 间隔形状与事件提升坐标的类型区分

“视界形状（horizon shape）”在本章中只指一个相邻实零点区间及其规范解析数据

$$(\Delta_k, p_k),$$

它不引入新的生成身份，也不等同于第一章（H01）与第五章（H05） 中有限视界事件提升所使用的 $d_E(\tau)$，更不等同于实际零点横向坐标

$$d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2}.$$

本章研究的是 RH 闭合后沿实轴排列的零点之间的**纵向间隔几何**；事件提升的横向角色读数不进入本章主定理链。

0.4 精确唯一性与稳定反演分层

本章建立的是 exact-information 层面的唯一确定性：完整边界解析芽能否对应两个不同的全局实谱。答案是否定的。有限精度测量、噪声敏感性、条件数、数值稳定性与算法复杂度属于另一个计算逆谱层级，不由本章的解析唯一性自动给出。

1. 实零点谱与基本设置

1.1 实零点谱

本章承接第一章（H01） 的前置闭合结论：Riemann 完成函数 $\Xi(t) = \xi(1/2 + it)$ 的相关非平凡零点由此进入可排序的实零点谱框架。本章从这里继续研究相邻零点间隔内部的规范 shape、共享边界解析芽与局部—全局谱确定；后文所有定理均在第 0 节声明的实零点谱前提下展开。

本章不把“不同零点地址只有一个”与“解析重数等于一”混为一谈。标准解析重数 m_k 始终作为独立谱数据保留。第三章（H03） 进一步区分零点地址、表示叶数与 analytic multiplicity；本章只研究 m_k 如何由 间隔边界形状 精确读取、如何参与相邻区间拼接，以及如何进入全局谱确定链。GHT 或生成审计不作为本章数学证明的前提。

1.2 从间隔长度到区间形状

把不同正零点写为

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots,$$

并令

$$\Delta_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k.$$

经典间隔数据 Δ_k 记录两个相邻零点的距离。进一步考虑：在两个零点之间，$-\Xi'/\Xi$ 的完整相位输运、端点重数、共享边界解析芽以及全部其他零点产生的全局谱场，能否被组织成一个规范的局部对象。

这些数据共同构成本章所称的视界形状（horizon shape）；其中“horizon”仅指相邻零点区间及其规范读出。

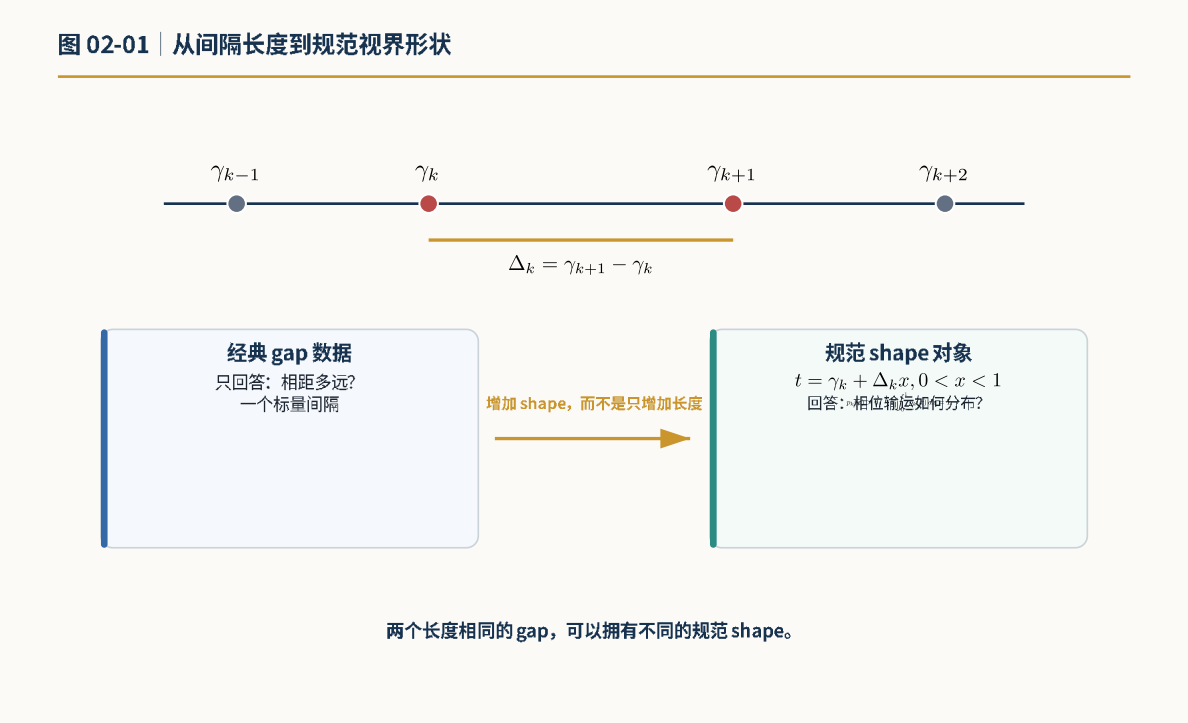


图 02-01　从间隔长度到规范视界形状。 标量 $\Delta_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k$ 只记录两个相邻零点相距多远；本章进一步把区间单位尺度化，并用概率密度 p_k 记录整次 pole-to-pole 相位输运在这个距离中的分布。两个长度相同的 gap 因而仍可以拥有不同的 shape。

2. 亚纯 Herglotz 响应与相位单调性

定义

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

函数 Ξ 为偶实整函数。设其不同实零点按严格递增次序写为

$$\cdots < \gamma_{-1} < \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots,$$

相应解析重数为

$$m_j = \mathrm{ord}_{\gamma_j}\Xi \in \mathbb{N}.$$

Riemann 情形中零点关于原点成对对称。

定义

$$\boxed{m(z) := -\frac{\Xi'(z)}{\Xi(z)}.} \tag{2.1}$$

在本章的实零点谱设置下，配对 Hadamard 乘积给出

$$m(z) = \sum_j \frac{m_j}{\gamma_j - z}, \tag{2.2}$$

其中一阶项按 Riemann 对称配对理解；导数级数

$$m'(z) = \sum_j \frac{m_j}{(\gamma_j - z)^2} \tag{2.3}$$

在避开极点的紧集上局部一致收敛。

若 $z \in \mathbb{C}_+$，每一项 $(\gamma_j - z)^{-1}$ 的虚部为正，因此 m 是 meromorphic Herglotz function。特别地，在任意两个相邻实极点之间，

$$m'(t) > 0. \tag{2.4}$$

后文使用这一亚纯 Herglotz 结构及其 Cayley 相位性质。在标准 canonical-system realization 中，m 可作为 Weyl–Herglotz m-function 读取；本章统一称其为 **Herglotz 响应**。

3. 规范视界形状密度（horizon-shape density）

直观图景。 长度 Δ_k 只回答“两个零点相距多远”；p_k 则回答“从左端到右端的整次相位输运怎样分布在这个距离里”。两个长度相同的 gap 可以有不同的 p_k，因此 shape 是比 间隔长度 更细的数据。

固定相邻零点

$$I_k = (\gamma_k, \gamma_{k+1}), \qquad \Delta_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k.$$

令

$$t = \gamma_k + \Delta_k x, \qquad 0 < x < 1,$$

并定义无量纲 Herglotz 响应

$$\boxed{M_k(x) = \Delta_k m(\gamma_k + \Delta_k x).} \tag{3.1}$$

由于 $m' > 0$，

$$M_k'(x) > 0,$$

且

$$M_k(0^+) = -\infty, \qquad M_k(1^-) = +\infty.$$

定理 3.1（规范相位概率测度）

定义

$$\boxed{p_k(x) = \frac{1}{\pi}\frac{M_k'(x)}{1+M_k(x)^2}.} \tag{3.2}$$

则

$$p_k(x) > 0, \qquad \int_0^1 p_k\,(x)\,dx = 1. \tag{3.3}$$

证明。

$$\frac{d}{dx}\arctan M_k(x) = \frac{M_k'(x)}{1+M_k(x)^2}.$$

而 M_k 从 $-\infty$ 严格增加到 $+\infty$，故

$$\int_0^1 p_k\,(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

证毕。

定义累积相位

$$F_k(x) := \int_0^x p_k\,(u)\,du. \tag{3.4}$$

则

$$\arctan M_k(x) = -\frac{\pi}{2} + \pi F_k(x),$$

故

$$\boxed{M_k(x) = -\cot(\pi F_k(x)).} \tag{3.5}$$

因此 p_k 完整决定 M_k。

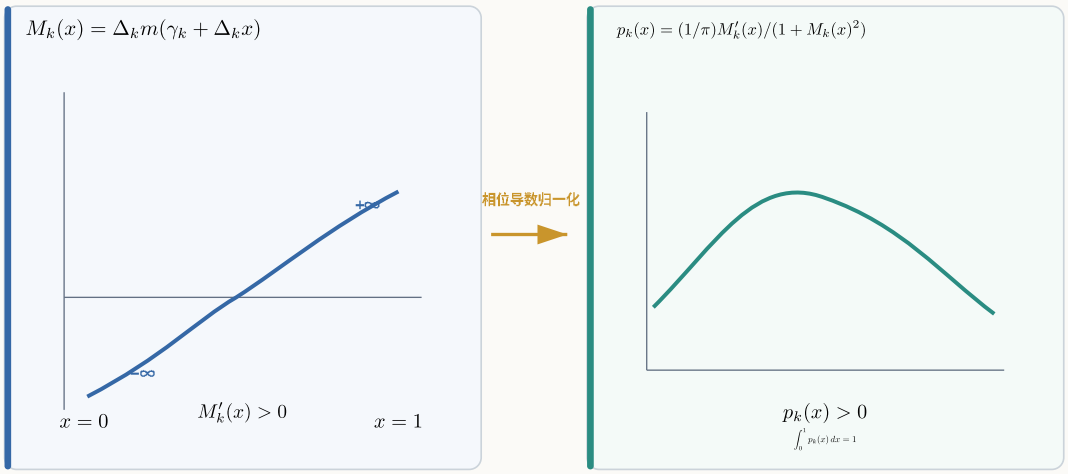
与经典相位理论的关系

若定义 Cayley transform

$$\Theta(z) = \frac{m(z)-i}{m(z)+i},$$

则 Θ 是 meromorphic inner function，实轴相位严格增加。式 (3.2) 本质上是该相位导数在单个 pole-to-pole 区间上的单位质量归一化。“单调相位”属于经典 meromorphic-inner/Herglotz 理论。本章将这一相位导数逐间隔单位尺度化，并由此得到边界重数、互反解析芽、全阶拼接与矩重建结构。

图 02-02 | Herglotz 响应、单调相位与规范概率密度



Herglotz 响应从 $-\infty$ 严格增到 $+\infty$，因此一次完整相位输运恰好归一为单位质量。

图 02-02　Herglotz 响应、单调相位与规范概率密度。 在相邻两个实极点之间，$M_k(x)$ 从 $-\infty$ 严格增加到 $+\infty$。其 Cayley 相位导数经 $1/\pi$ 归一化后得到 $p_k(x) > 0$，且 $\int_0^1 p_k\,(x)\,dx = 1$。因此一个 gap 的完整相位输运被规范化为单位质量。

4. 区间重建与边界重数量子化

由 (3.5)，给定 p_k 与 Δ_k 可恢复

$$m(\gamma_k + \Delta_k x) = \frac{1}{\Delta_k} M_k(x). \tag{4.1}$$

又因为

$$\frac{d}{dx} \log|\Xi(\gamma_k + \Delta_k x)| = -M_k(x),$$

任取 $x_0 \in (0,1)$，有

$$\boxed{\frac{|\Xi(\gamma_k + \Delta_k x)|}{|\Xi(\gamma_k + \Delta_k x_0)|} = \exp\left[-\int_{x_0}^{x} M_k\,(u) du\right].} \tag{4.2}$$

在左端零点附近写

$$m(\gamma_k + \delta) = -\frac{m_k}{\delta} + r_k + O(\delta), \tag{4.3}$$

其中 r_k 为有限部分。代入 (3.2) 得到：

定理 4.1（边界重数量子化）

$$\boxed{p_k(0^+) = \frac{1}{\pi m_k}, \qquad p_k(1^-) = \frac{1}{\pi m_{k+1}}.} \tag{4.4}$$

所以

$$\boxed{m_k = \frac{1}{\pi p_k(0^+)} = \frac{1}{\pi p_{k-1}(1^-)}.} \tag{4.5}$$

边界值只能落在

$$\left\{\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots\right\}.$$

解析简单性等价于相应边界密度等于 $1/\pi$。

一阶展开还给出

$$p_k'(0^+) = \frac{2\Delta_k r_k}{\pi m_k^2}, \qquad p_{k-1}'(1^-) = \frac{2\Delta_{k-1} r_k}{\pi m_k^2}, \tag{4.6}$$

因而

$$\boxed{\frac{p_{k-1}'(1^-)}{\Delta_{k-1}} = \frac{p_k'(0^+)}{\Delta_k}.} \tag{4.7}$$

式 (4.7) 只是下一节全阶 gluing 的第一非平凡层。

图 02-03｜边界形状密度量子化解析重数

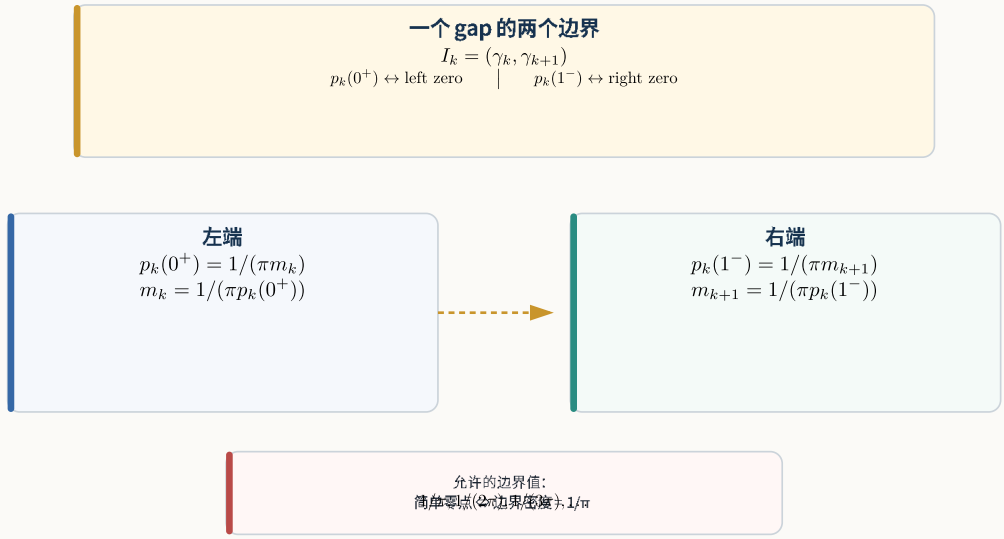


图 02-03　边界形状密度量子化解析重数。规范 shape 的两个端点值分别读取左右零点的解析重数：$p_k(0^+) = 1/(\pi m_k)$，$p_k(1^-) = 1/(\pi m_{k+1})$。因此边界密度只能落在 $1/\pi, 1/(2\pi), 1/(3\pi), \dots$ 这一离散序列上，简单零点恰对应边界密度 $1/\pi$。

5. 互反边界坐标与全阶边界 Jet 拼接

为什么这一节重要。 原来的 Herglotz 响应在零点处无穷大，直接比较高阶导数会被极点遮蔽。取倒数以后，零点变成 $R_k = 0$ 的普通解析边界点；这一步把“两个 gap 共用一个零点”升级成“两个 gap 共用一个完整解析接口”。

裸的 M_k 在边界发散，因此高阶 gluing 的正确变量不是裸 $p_k^{(n)}$，而是 reciprocal coordinate

$$\boxed{R_k(x) := -\frac{1}{M_k(x)}.} \tag{5.1}$$

由 (3.5)，

$$\boxed{R_k(x) = \tan(\pi F_k(x)) = \tan\left(\pi \int_0^x p_k(u)du\right).} \tag{5.2}$$

特别地，$R_k(0) = R_k(1) = 0$（按端点解析延拓理解）。

固定共享零点 γ_k，定义

$$\boxed{G_k(\delta) := -\frac{1}{m(\gamma_k + \delta)}.} \tag{5.3}$$

由 (4.3)，G_k 在 $\delta = 0$ 处解析，且

$$G_k(0) = 0, \qquad G_k'(0) = \frac{1}{m_k}. \tag{5.4}$$

右侧 gap 满足

$$R_k(x) = \frac{1}{\Delta_k} G_k(\Delta_k x), \tag{5.5}$$

左侧 gap 满足

$$R_{k-1}(x) = \frac{1}{\Delta_{k-1}} G_k(\Delta_{k-1}(x-1)). \tag{5.6}$$

定理 5.1（全阶边界 Jet 拼接 / Infinite Boundary-Jet Gluing）

对任意整数 $n \geq 1$，

$$\boxed{\Delta_{k-1}^{1-n} R_{k-1}^{(n)}(1^-) = \Delta_k^{1-n} R_k^{(n)}(0^+) = G_k^{(n)}(0).} \tag{5.7}$$

证明。 对 (5.5)、(5.6) 逐次求导即得。证毕。

这一公式说明：相邻间隔 在共享零点处共享的不是有限个经验边界量，而是同一个 reciprocal Herglotz 解析芽。

推论 5.2（Laurent-germ 等价）

$G_k = -1/m$ 的完整 Taylor germ 与 m 在 γ_k 处的完整 Laurent germ 互相唯一决定。因此 scaled boundary R-jets 的全序列与共享零点处的完整 Laurent 数据等价。

说明

从二阶以上开始，裸 $p_k^{(n)}$ 的 gluing 会出现非线性修正。例如端点处

$$R''' = \pi p'' + 2\pi^3 p^3,$$

所以正确的不变量是 R-jet，而不是简单的 p''/Δ^2。这也是采用 reciprocal coordinate 的必要性。

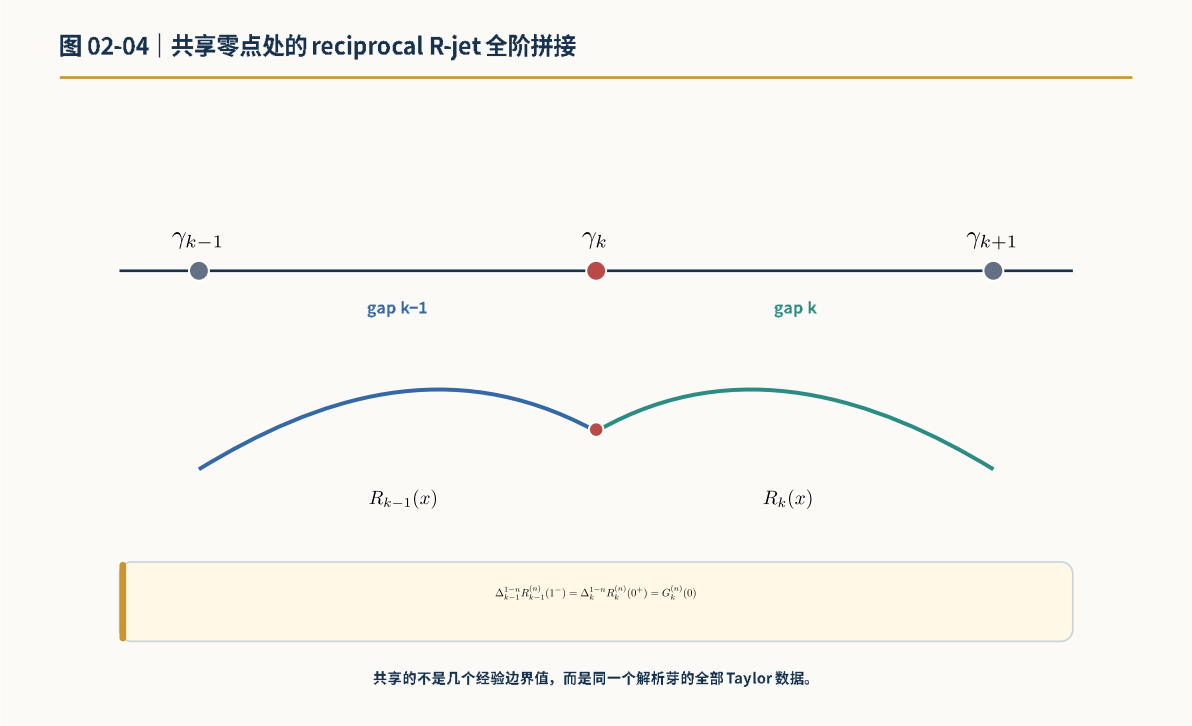


图 02-04　共享零点处的 reciprocal R-jet 全阶拼接。 裸 Herglotz 响应在零点处发散，而 reciprocal coordinate $R = -1/M$ 把共享零点变成普通解析边界点。相邻两个 gap 经各自尺度归一化后的全部 R-jets 在共享零点处逐阶相等，因此两侧共享的是同一个完整解析芽，而不只是有限几个经验边界量。

6. 边界解析芽产生全局逆距离谱矩

设当前零点为 γ_k，令 $\delta = z - \gamma_k$。在最近其他零点之前的圆盘内，

$$m(\gamma_k + \delta) = -\frac{m_k}{\delta} + \sum_{r\geq 1} S_{k,r}\,\delta^{r-1}, \tag{6.1}$$

其中

$$S_{k,r} = \sum_{j\neq k} \frac{m_j}{(\gamma_j - \gamma_k)^r}. \tag{6.2}$$

对 $r \geq 2$，级数绝对收敛；$r = 1$ 按与 m 一致的对称正则化理解。

定义

$$\boxed{Q_k(x) := \frac{x}{R_k(x)}}. \tag{6.3}$$

由 $R_k(x) = G_k(\Delta_k x)/\Delta_k$ 以及 $G_k = -1/m$，得到

$$Q_k(x) = -\Delta_k x\, m(\gamma_k + \Delta_k x). \tag{6.4}$$

代入 (6.1)：

$$\boxed{Q_k(x) = m_k - \sum_{r\geq 1} C_{k,r}\,x^r,} \tag{6.5}$$

其中

$$\boxed{C_{k,r} = \Delta_k^r S_{k,r} = \sum_{j\neq k} m_j \left(\frac{\Delta_k}{\gamma_j - \gamma_k}\right)^r.} \tag{6.6}$$

因此

$$\boxed{C_{k,r} = -\frac{1}{r!} Q_k^{(r)}(0^+).} \tag{6.7}$$

定理 6.1（谱矩提取 / Spectral-Moment Extraction）

给定 Δ_k 与 p_k 在左端的完整解析芽，就唯一确定全部 $C_{k,r}$，从而对每个 $r \geq 2$ 唯一确定全局逆距离谱矩

$$S_{k,r} = \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{(\gamma_j - \gamma_k)^r}. \tag{6.8}$$

这一定理给出全局重建所需的谱矩入口。

7. 单侧边界解析芽的全局谱确定

核心成果的直观说法。 如果把一个零点边界附近的完整边界解析芽 看成一枚“谱指纹”，那么这枚指纹不是只认出附近几个零点。其全部 Taylor 系数形成全局逆距离矩，而这些矩唯一确定一个紧支撑正测度；该测度的原子位置和质量再把全部零点与重数逐一还原。

令

$$y_j := \frac{\Delta_k}{\gamma_j - \gamma_k}, \qquad j \neq k. \tag{7.1}$$

定义正离散测度

$$\boxed{\nu_k^{\mathrm{gap}} := \sum_{j \neq k} m_j \, y_j^2 \, \delta_{y_j}.} \tag{7.2}$$

由于

$$\sum_{j \neq k} \frac{m_j}{|\gamma_j - \gamma_k|^2} < \infty,$$

ν_k^{gap} 为有限正测度。又因为零点集离散，当前零点到其余零点的最近距离

$$d_k := \min_{j \neq k} |\gamma_j - \gamma_k| > 0,$$

故

$$|y_j| \leq \frac{\Delta_k}{d_k};$$

因此 ν_k^{gap} 具有紧支撑。

其矩为

$$\boxed{\int y^n \, d\nu_k^{\mathrm{gap}}(y) = C_{k,n+2}, \qquad n \geq 0.} \tag{7.3}$$

紧支撑有限正测度由其全部矩唯一决定。因此得到本章的主结果。

定理 7.1（单侧边界解析芽的全局谱确定 / Single-Boundary Global Spectral Determination）

在第 0 节固定的 Riemann 实零点谱框架下，固定一个零点 γ_k，并给定相邻间隔尺度 Δ_k。若已知对应 horizon shape p_k 在 $x = 0^+$ 的完整边界解析芽，则该数据唯一确定全部不同实零点及其解析重数：

$$\boxed{\{(\gamma_j, m_j) : j \in \mathbb{Z}\}.} \tag{7.4}$$

证明。 完整 p_k-germ 经 (5.2)、(6.3) 唯一给出 Q_k-germ，故由 (6.7) 得到 $C_{k,r}$ 的全部序列。由 (7.3)，这些量给出紧支撑正测度 ν_k^{gap} 的全部 moments，因此 ν_k^{gap} 唯一。其非零原子位置给出 y_j，从而

$$\gamma_j = \gamma_k + \frac{\Delta_k}{y_j}. \tag{7.5}$$

原子质量满足

$$\nu_k^{\mathrm{gap}}(\{y_j\}) = m_j y_j^2,$$

故

$$m_j = \frac{\nu_k^{\mathrm{gap}}(\{y_j\})}{y_j^2}. \tag{7.6}$$

于是全部零点位置和重数均唯一恢复。证毕。

解释

定理 7.1 给出**精确解析数据的全局唯一确定性**：同一个完整边界解析芽与给定间隔尺度不能对应两个不同的全局实谱。有限精度扰动下的条件数、误差传播、稳定反演与算法复杂度属于计算逆谱层，与这里的精确唯一性分属不同层级。

定理 7.2（单一区间全局唯一性 / One-Gap Global Uniqueness）

若给定整个 $p_k(x)$、γ_k 与 Δ_k，则 (3.5) 唯一恢复 m 在开区间 I_k 上的值。任意两个属于同一 meromorphic class 的候选响应若在该 gap 上产生完全相同的 p_k，则由恒等定理全局一致。若它们分别为 $-X_1'/X_1$、$-X_2'/X_2$，则

$$X_1 = CX_2, \qquad C \neq 0. \tag{7.7}$$

定理 7.1 比定理 7.2 更强：完整 gap 不是必要的，一个边界点的一侧完整解析芽已足够。

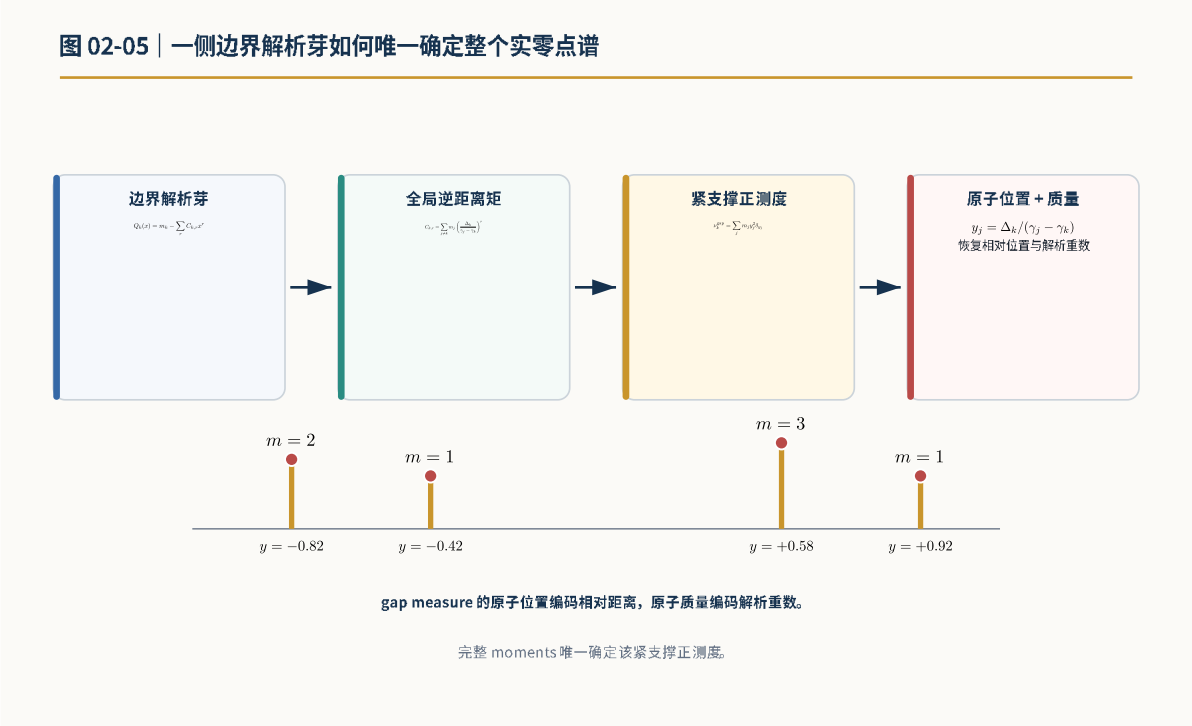


图 02-05　一侧边界解析芽如何唯一确定整个实零点谱。 边界解析芽的 Taylor 系数给出全局逆距离矩 $C_{k,r}$；这些矩是紧支撑正测度 ν_k^{gap} 的完整矩序列。该测度由全部矩唯一确定，而其原子位置和原子质量分别恢复所有相对零点位置与解析重数，从而在给定 γ_k, Δ_k 后唯一恢复整个实零点谱。

8. 与 Herglotz 逆谱表示的关系

经典 Herglotz 表示说明，具有给定实 poles 与正 spectral masses 的 meromorphic Herglotz function 可写为

$$m(z) = az + b + \sum_j m_j \left(\frac{1}{\gamma_j - z} - \frac{\gamma_j}{1+\gamma_j^2} \right), \qquad a \geq 0,\ b \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

因此“pole locations + residues”一般只确定 m 到一个 affine defect $az + b$。

在 Riemann Ξ 类中，Ξ 为偶函数，因此 $m = -\Xi'/\Xi$ 为奇函数，迫使 $b = 0$。进一步，若要求对应 entire function 保持 order one，则 $a > 0$ 会通过积分产生 $e^{-az^2/2}$ 型二阶指数因子，故必须 $a = 0$。因此在“偶、order-one entire”这一明确函数类中，全谱数据唯一决定 m。

这一节应用经典 Herglotz/逆谱框架，说明定理 7.1 所恢复的 pole/residue spectrum 与 Riemann m-function 之间不存在额外隐藏自由度。

9. 有限阶 Jet 的最近邻间隔界

有限信息也有可见成果。 完整解析芽才能唯一恢复全谱，但前几个 jet 已经能给最近邻距离做上下夹逼。随着阶数增加，夹逼收紧到真实最近邻间隔；因此这里不是“只有无限信息才有意义”。

完整边界解析芽给出全部谱；有限 boundary jet 则只给出有限个 $C_{k,r}$。这些有限 moments 已经严格控制最近邻距离。

令

$$d_k = \min_{j\neq k}|\gamma_j - \gamma_k|. \tag{9.1}$$

对 $r \geq 1$，

$$C_{k,2r} = \sum_{j\neq k} m_j \left|\frac{\Delta_k}{\gamma_j - \gamma_k}\right|^{2r}. \tag{9.2}$$

最大的基数为 Δ_k/d_k。因此：

定理 9.1（有限阶 Jet 最近邻夹逼 / Finite-Jet Nearest-Gap Squeeze）

$$\boxed{\frac{\Delta_k}{C_{k,2r}^{1/(2r)}} \leq d_k \leq \Delta_k \sqrt{\frac{C_{k,2r}}{C_{k,2r+2}}}.} \tag{9.3}$$

并且两端在 $r \to \infty$ 时都趋于 d_k。

证明。 由最近零点项可得

$$C_{k,2r} \geq \left(\frac{\Delta_k}{d_k}\right)^{2r},$$

给出左不等式。另一方面

$$C_{k,2r+2} \leq \left(\frac{\Delta_k}{d_k}\right)^{2} C_{k,2r},$$

给出右不等式。高阶幂和的根极限与相邻矩比极限都趋向最大基数。证毕。

与 Euler–Rayleigh 方法的关系

利用 reciprocal power sums 夹逼最近零点属于 Euler–Rayleigh/Rayleigh-sum 方法。本章中的 reciprocal moments 由单个 Riemann 零点间隔的边界形状 Jet 规范地产生，因此 (9.3) 可直接由该局部边界数据读取。

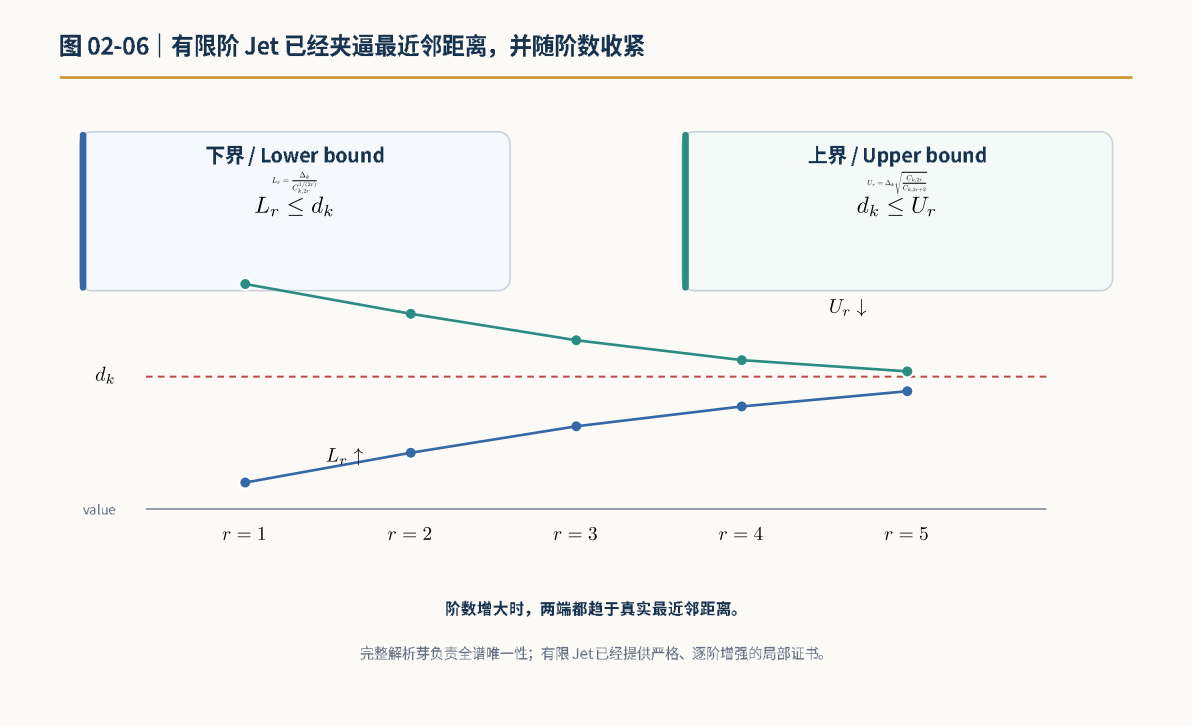


图 02-06　有限阶 Jet 对最近邻距离的夹逼。 完整边界解析芽负责全局谱唯一性，而有限个偶阶逆距离矩已经给出最近邻距离 d_k 的严格上下界。随着 r 增大，下界与上界从两侧收紧，并共同趋向真实的 d_k。

10. 残余矩的相邻间隔三分律

现在假设 k 不是正谱的最左端点，使得前一个正零点存在。当前间隔 的右端零点 γ_{k+1} 在 (9.2) 中贡献恰为 m_{k+1}。扣除这一已知原子，定义

$$\boxed{E^L_{k,r} := C_{k,2r} - m_{k+1}.} \tag{10.1}$$

则

$$E^L_{k,r} = \sum_{j\neq k,k+1} m_j \left|\frac{\Delta_k}{\gamma_j - \gamma_k}\right|^{2r}. \tag{10.2}$$

在所有剩余零点中，唯一可能比当前右端点更靠近 γ_k 的是左邻零点 γ_{k-1}。因此：

定理 10.1（残余矩间隔三分律 / Residual-Moment Gap Trichotomy）

$$\boxed{E^L_{k,r} \to \begin{cases} +\infty, & \Delta_{k-1} < \Delta_k, \\ m_{k-1}, & \Delta_{k-1} = \Delta_k, \\ 0, & \Delta_{k-1} > \Delta_k. \end{cases}} \tag{10.3}$$

证明。 左邻项的基数为 Δ_k/Δ_{k-1}。若该数大于 1，则对应项指数增长；若等于 1，则该项恒为 m_{k-1}，其余项基数严格小于 1；若小于 1，则全部剩余基数均严格小于 1。因为 $E^L_{k,1} < \infty$，可用支配收敛处理最后两种情形。证毕。

定义

$$A^L_{k,r} := \frac{E^L_{k,r+1}}{E^L_{k,r}}. \tag{10.4}$$

由正矩序列的 log-convexity，$A^L_{k,r}$ 随 r 单调不减，并趋于最大残余基数的平方。

因此有两个有限阶证书：

$$A_{k,r}^{L} > 1 \Rightarrow \Delta_{k-1} < \Delta_k, \tag{10.5}$$

以及

$$E_{k,r}^{L} \le 1 \Rightarrow \Delta_{k-1} > \Delta_k. \tag{10.6}$$

若 (10.5) 成立，则进一步有

$$\boxed{\frac{\Delta_k}{(E_{k,r}^{L})^{1/(2r)}} \le \Delta_{k-1} \le \Delta_k \sqrt{\frac{E_{k,r}^{L}}{E_{k,r+1}^{L}}}.} \tag{10.7}$$

右端边界解析芽 给出完全对称的 $E_{k,r}^{R}$，从而一个间隔 的两侧完整解析芽 判定三相邻间隔 的局部形态。

11. 边界谱矩的 Hankel 正性

由 (7.2) – (7.3)，$\{C_{k,n+2}\}_{n\ge 0}$ 是有限正测度的 Hamburger moment sequence。因此对任意 $N \ge 0$，

$$\boxed{H_k^{(N)} := [C_{k,i+j+2}]_{i,j=0}^{N} \succcurlyeq 0.} \tag{11.1}$$

特别地

$$C_{k,2} > 0, \tag{11.2}$$

$$C_{k,2}C_{k,4} - C_{k,3}^{2} \ge 0. \tag{11.3}$$

这些条件给出候选 horizon shape 的有限阶可谱化必要条件：任意正概率密度并不自动能够成为某个实离散零点谱的 gap shape。

若记

$$a = p_k(0^+), \quad b = p_k'(0^+), \quad c = p_k''(0^+),$$

则直接展开得到

$$\boxed{C_{k,1} = \frac{b}{2\pi a^2},} \tag{11.4}$$

以及

$$\boxed{C_{k,2} = \frac{\frac{\pi^2}{3}a^4 + \frac{1}{6}ac - \frac{1}{4}b^2}{\pi a^3}.} \tag{11.5}$$

所以 $C_{k,2} > 0$ 等价于

$$\boxed{2ac - 3b^2 + 4\pi^2 a^4 > 0.} \tag{11.6}$$

这是一个纯 boundary-shape curvature constraint。

12. 全局外部谱场与相位中心

在单个 gap 内，将左右端点极点显式剥离：

$$\boxed{M_k(x) = -\frac{m_k}{x} + \frac{m_{k+1}}{1-x} + E_k(x).} \tag{12.1}$$

由 (2.3)，

$$\boxed{E_k'(x) = \Delta_k^2 \sum_{j \neq k,k+1} \frac{m_j}{(\gamma_j - \gamma_k - \Delta_k x)^2} > 0.} \tag{12.2}$$

因此一个间隔 的内部 shape 并非仅由两个端点决定；全部其余零点都以严格递增外部场的方式进入当前区间。

由于 M_k 从 $-\infty$ 严格增加到 $+\infty$，存在唯一 $x_k^* \in (0,1)$ 使

$$M_k(x_k^*) = 0. \tag{12.3}$$

该点满足

$$\Xi'(\gamma_k + \Delta_k x_k^*) = 0$$

且

$$\int_0^{x_k^*} p_k(x)dx = \frac{1}{2},$$

所以它同时是唯一相位中心与 shape probability median。

若只保留两端 poles，基准场

$$B_k(x) = -\frac{m_k}{x} + \frac{m_{k+1}}{1-x}$$

的零点为

$$x_k^{(0)} = \frac{m_k}{m_k + m_{k+1}}.$$

真实中心满足

$$\boxed{\operatorname{sgn}(x_k^{(0)} - x_k^*) = \operatorname{sgn} E_k(x_k^*).} \tag{12.4}$$

因此 phase-center displacement 是全局外部谱场在当前间隔 中的一个局部读数。

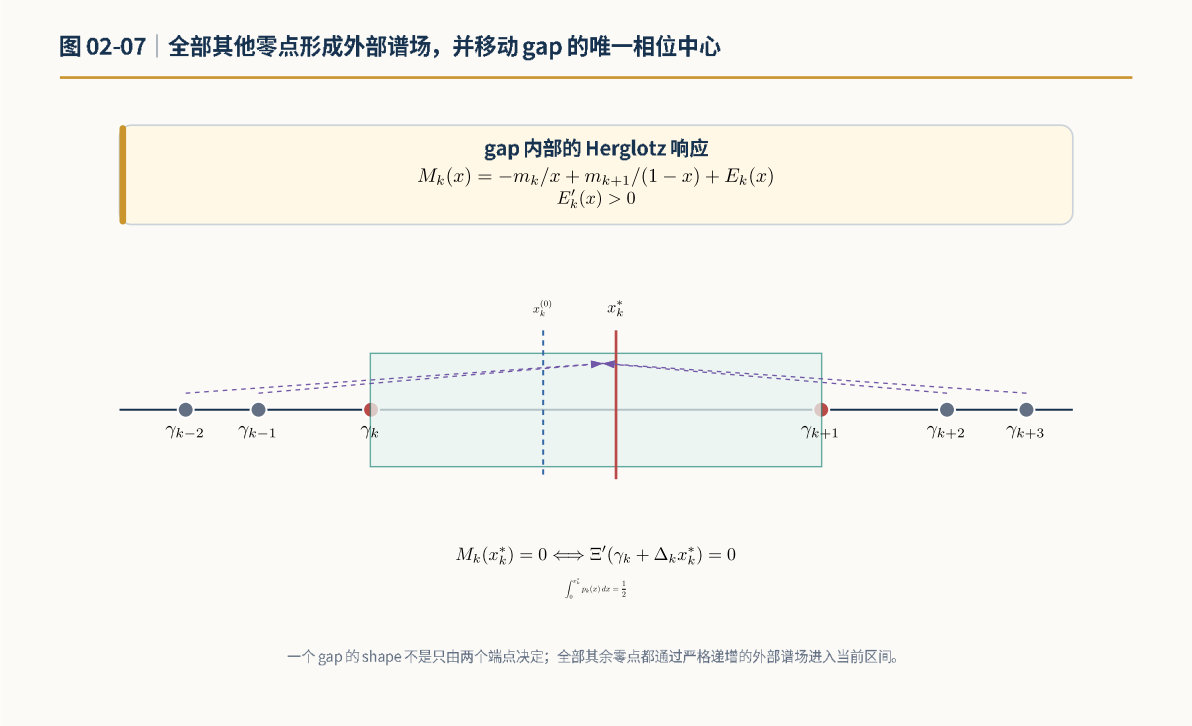


图 02-07　外部谱场与唯一相位中心。 将左右端点极点从 M_k 中显式剥离后，全部其余零点共同形成严格递增的外部谱场 $E_k(x)$。因此真实相位中心 x_k^* 不仅由两个端点决定；它满足 $M_k(x_k^*) = 0$、$\Xi'(\gamma_k + \Delta_k x_k^*) = 0$，同时也是 shape probability 的中位点。

13. 经典理论基础与统一结构

Herglotz 表示、紧支撑矩问题和 Euler–Rayleigh 型逆幂和方法构成本章的经典理论基础。在逐个 Riemann 零点间隔的规范形状坐标中，它们形成同一条定理链：全阶边界拼接、单侧解析芽的全局谱确定，以及有限阶 Jet 的邻接间隔读出。

本节把所用经典工具与本章建立的统一结构分别列出。

13.1 经典输入

以下内容均属于成熟理论：

1. meromorphic Herglotz functions 与 meromorphic inner functions 的 Cayley 对应；
2. Herglotz 表示中的线性项与正离散 Clark/spectral measure；
3. 实轴 meromorphic-inner phase 的单调性；
4. 紧支撑有限正测度由全部 moments 唯一确定；
5. reciprocal power sums / Rayleigh sums 对最近零点的 Euler–Rayleigh 型上下界；
6. 把 Riemann Ξ 放入 de Branges / meromorphic-inner / spectral 框架的相关研究。

13.2 统一结构

上述经典工具在本章中组织为以下统一结构：

- 对每一个相邻 Riemann 零点 gap，以单位尺度 phase density p_k 作为规范 shape 对象；
- 从同一 p_k 坐标同时读取端点解析重数与内部相位；
- 引入 reciprocal coordinate $R_k = -1/M_k$，使共享零点的全部高阶兼容统一为 scaled boundary-jet gluing；
- 将单侧边界解析芽 直接转换为全部逆距离谱矩，再转换为一个紧支撑正测度，从而唯一恢复整个全局零点谱及重数；
- 使有限 boundary jets 自然产生最近邻和相邻间隔 的确定性界与 residual trichotomy；
- 将局部 gap shape、共享边界解析芽、全局 spectrum 三者放在同一个可反演的确定性链条中。

14. 结论

本章把相邻 Riemann 零点区间从一个标量长度 Δ_k 提升为一个规范 shape 对象 Δ_k, p_k。其中 p_k 是总质量为一的相位密度；它的端点值量子化解析重数，它的 reciprocal coordinate 在共享零点处具有全阶 gluing，而其完整边界解析芽产生全部全局逆距离谱矩。

最强的确定性结论是：

一个零点位置γ_k + 一个相邻间隔尺度Δ_k + 一侧完整边界解析芽 ⇒ 整个实零点谱及全部解析重数.

这里建立的是精确解析层的全局唯一确定性：完整边界解析芽在给定间隔尺度后只对应一个全局实谱。有限精度数据上的稳定反演属于计算逆谱层，与这一解析唯一性相区分。

有限阶解析芽数据则形成一条自然层级：越多 boundary jets 给出越多全局 moments，从而越来越紧地控制最近邻距离与相邻间隔 ratio。相邻两个 gap 在共享零点处的 Infinite Boundary-Jet Gluing 又保证两侧的局部谱读出属于同一个全局解析芽。

因此，一个 Riemann 零点间隔不是“两个零点之间的空白”。在本章的规范坐标中，它同时携带内部相位、端点重数、共享边界解析芽、全局 moment 数据以及其他全部零点投影到当前区间中的外部谱场。局部 interval 与全局 spectrum 由此成为同一 meromorphic response 的两种尺度读出。

附录 A：前三个 boundary spectral coefficients

记

$$a = p_k(0^+), \qquad b = p_k'(0^+), \qquad c = p_k''(0^+), \qquad d = p_k'''(0^+).$$

由

$$Q_k(x) = \frac{x}{\tan\left(\pi \int_0^x p_k\,(u)du\right)}$$

展开得到

$$m_k = \frac{1}{\pi a},$$

$$C_{k,1} = \frac{b}{2\pi a^2},$$

$$C_{k,2} = \frac{\frac{\pi^2}{3}a^4 + \frac{1}{6}ac - \frac{1}{4}b^2}{\pi a^3},$$

$$C_{k,3} = \frac{4\pi^2 a^4 b + a^2 d - 4abc + 3b^3}{24\pi a^4}.$$

这些公式给出从低阶 boundary derivatives 到低阶全局 inverse-distance moments 的直接转换。

第三章　Riemann 零点的身份地址与解析重数

——开放乘法视界下的表示叶数、地址唯一性与除子重数分层

摘要

设

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

为 Riemann 完成函数，并以

$$Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)$$

表示其不同非平凡零点组成的支撑集合。在开放乘法关系、移动视界、中心化 Mellin 表示以及终端零点读数的统一框架中，零点表示叶数、支撑地址计数与解析重数形成严格分层。

若

$$\rho\in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi),\qquad \xi(s)=(s-\rho)^{m_\rho}U_\rho(s),\qquad U_\rho(\rho)\neq 0,$$

则 ρ 是零点的解析地址，而

$$m_\rho=\mathrm{ord}_\rho\xi$$

是该地址上的解析重数。相应零点除子写为

$$\mathcal{D}_\xi^{\mathrm{nt}}=\sum_{\rho\in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)}m_\rho\,[\rho].$$

由此自然分离出两个不同对象：支撑

$$\mathrm{supp}\mathcal{D}_\xi^{\mathrm{nt}}=Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)$$

只记录每个不同零点地址一次；除子权重 m_ρ 则记录同一地址处的解析消失阶数。

开放乘法视界中的互反两翼属于第三层数据。它们是同一完整事件在互反角色下的表示叶，并不构成新的零点支撑地址。中心化参数在生成源、壳层、ζ、ξ 与终端读数之间保持精确传导，因此事件表示的复制、视界之间的连续提升以及相邻区间对共享端点的重复引用，都不改变终端支撑的地址计数。

由此得到三层分离：

$$\boxed{\text{事件表示叶数}\neq\text{支撑地址计数}\neq\text{解析重数.}}$$

其中，事件表示叶数记录有限互反提升中的表示叶数；支撑地址计数表示一个不同零点地址在支撑中只出现一次；解析重数则为 m_ρ。

进一步，对正高度零点定义

$$N_{\mathrm{supp}}(T)=\#\{\rho\in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi):0<\Im\rho\le T\},$$

以及按解析重数计数的

$$N_{\mathrm{div}}(T)=\sum_{\substack{\rho\in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)\\0<\Im\rho\le T}} m_\rho.$$

二者满足精确恒等式

$$\boxed{N_{\mathrm{div}}(T)-N_{\mathrm{supp}}(T)=\sum_{0<\Im\rho\le T}(m_\rho-1).}$$

因此支撑地址唯一性与解析简单性是两条不同命题；全部非平凡零点解析简单，当且仅当

$$m_\rho=1\quad\text{对全部}\rho,$$

等价地，

$$N_{\mathrm{div}}(T)=N_{\mathrm{supp}}(T)$$

对所有不穿过零点的 T 成立。

这一分层把零点地址、零点除子与事件表示置于同一对象账本中，并与相邻零点间隔中的重数数据、闭合后的保真谱以及身份保真（identity-faithful）/除子保真（divisor-faithful）谱实现保持统一接口。

1. 本章位置与对象层级

本章沿用第一章（H01）确立的统一对象纪律。根身份记为

$$\boxed{\Im_\times=(\mathbb{N}_{>0},\mu),\qquad \mu(m,q)=mq.}\tag{1.1}$$

开放乘法关系

$$\mathcal{R}_\times=\{(m,q,n)\in\mathbb{N}_{>0}^3:mq=n\}\tag{1.2}$$

是该根身份的关系表示。

沿中心化 Mellin 表示、乘法壳层、移动视界、ζ、Riemann 完成与终端零点读数展开时，表示层级逐层变化，根身份保持不变。全书采用

$$\boxed{\text{身份}\neq\text{角色}\neq\text{角色读数.}}\tag{1.3}$$

在这一对象纪律下，进一步区分三类数学类型不同的计数：

$$\boxed{\begin{aligned}\nu_{\mathrm{sheet}}(E)&:\ \text{事件表示叶数,}\\ \mu_{\mathrm{supp}}(\rho)&:\ \text{支撑地址计数,}\\ m_\rho&:\ \text{解析重数.}\end{aligned}}\tag{1.4}$$

其中：

- $\nu_{\mathrm{sheet}}(E)$ 属于有限视界事件的表示结构；
- $\mu_{\mathrm{supp}}(\rho)$ 属于不同零点地址组成的支撑；

- $m_\rho = \mathrm{ord}_\rho \xi$ 属于解析零点除子。

这三个量位于不同层级，后续定理均在这一类型区分下表述。



图 03-01　三层计数严格分离。事件表示叶数 $\nu_{\mathrm{sheet}}(E)$、支撑地址计数 $\mu_{\mathrm{supp}}(\rho)$ 与解析重数 m_ρ 分别属于事件表示、distinct zero support 与解析除子三个不同对象层。任何一层的“出现几次”都不能自动改写另外两层的计数。

2. 中心化参数与终端零点地址

令

$$W_z(m,q) = m^{-1/2-z} q^{-1/2+z} = (mq)^{-1/2} e^{z\log(q/m)}, \tag{2.1}$$

并定义

$$a_n(z) = \sum_{mq=n} m^{-1/2-z}\, q^{-1/2+z}. \tag{2.2}$$

在绝对收敛域中，

$$\sum_{n\geq 1} a_n(z) n^{-u} = \zeta\left(u+\frac{1}{2}+z\right)\zeta\left(u+\frac{1}{2}-z\right). \tag{2.3}$$

中心化参数沿生成源（source）、壳层（shell）、ζ、完成化（completion）与终端读数（终端读数） 保持同一参数身份。记这一精确传导为

$$\boxed{z_{\mathrm{source}} = z_{\mathrm{shell}} = z_\zeta = z_\xi = z_{\mathrm{term}}.} \tag{2.4}$$

当终端读数为非平凡零点

$$\rho = \frac{1}{2} + z_{\mathrm{term}}, \tag{2.5}$$

在 RH 闭合后的表示中可写为

$$\rho = \frac{1}{2} + i\gamma. \tag{2.6}$$

式 (2.4) 表示同一中心化参数在不同表示层中的精确传导；它不把不同数学类型等同起来。生成源关系、解析函数与零点地址仍分别属于各自的表示层。

3. 零点支撑、零点地址与解析除子

定义不同非平凡零点集合

$$\boxed{Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)=\{\rho:\xi(\rho)=0,\ \rho\text{非平凡}\}_{\mathrm{distinct}}.} \tag{3.1}$$

对任意

$$\rho\in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi),$$

存在唯一整数

$$m_\rho\geq 1$$

和在 ρ 邻域内解析且满足

$$U_\rho(\rho)\neq 0$$

的函数 U_ρ，使

$$\boxed{\xi(s)=(s-\rho)^{m_\rho}U_\rho(s).} \tag{3.2}$$

定义 3.1（零点身份地址）

复数 ρ 称为该非平凡零点的**身份地址**（identity address）。在 RH 闭合后的正高度谱中，亦可用其 ordinate

$$\gamma=\Im\rho>0 \tag{3.3}$$

作为纵向谱地址。

定义 3.2（解析重数）

整数

$$\boxed{m_\rho=\mathrm{ord}_\rho\xi} \tag{3.4}$$

称为零点 ρ 的解析重数。

定义 3.3（非平凡零点除子）

定义

$$\boxed{\mathcal{D}_\xi^{\mathrm{nt}}=\sum_{\rho\in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)}m_\rho\,[\rho].} \tag{3.5}$$

其支撑为

$$\boxed{\mathrm{supp}\mathcal{D}_\xi^{\mathrm{nt}}=Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi).} \tag{3.6}$$

因此，同一个零点对象天然携带两个不同层级的数据：

$$\boxed{\rho\quad\text{与}\quad m_\rho.} \tag{3.7}$$

前者确定“地址在哪里”，后者确定“函数在该地址以几阶消失”。

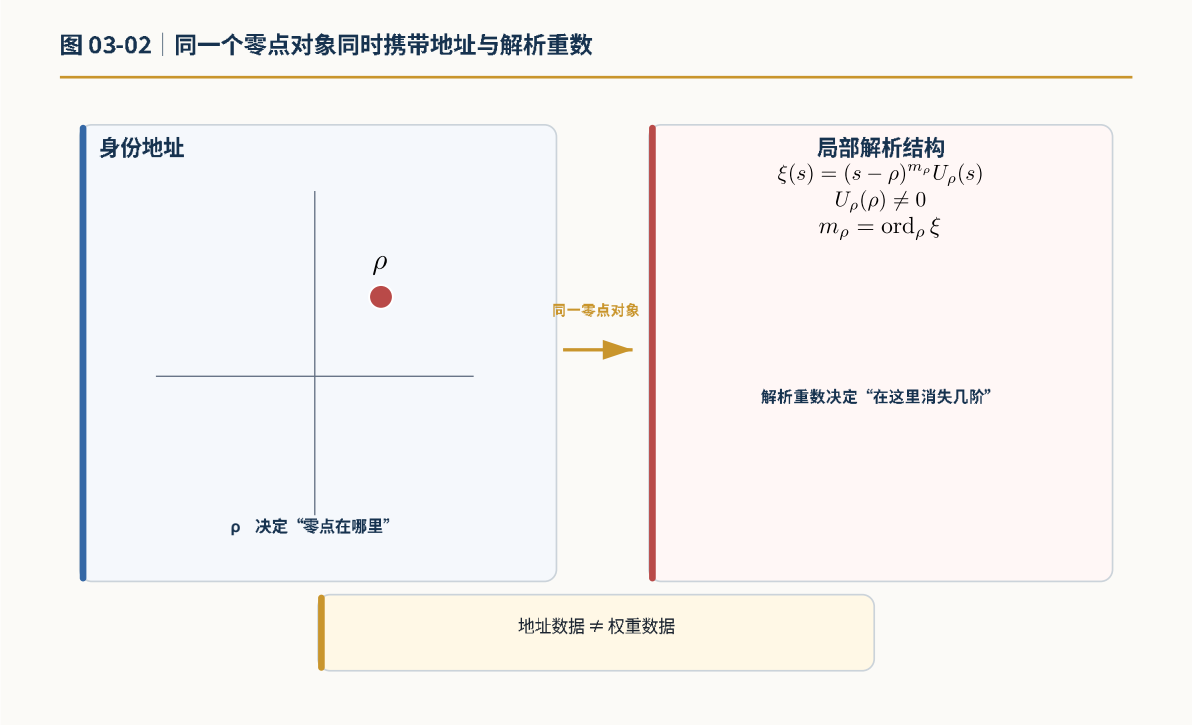


图 03-02　零点地址与解析重数。局部分解 $\xi(s) = (s-\rho)^{m_\rho} U_\rho(s)$ 同时给出两个不同层级的数据：ρ 是“零点在哪里”的身份地址，$m_\rho = \mathrm{ord}_\rho \xi$ 是“函数在该地址消失几阶”的解析重数。地址数据与权重数据不能合并成一个计数。

4. 三类计数的严格分层

“一个对象出现几次”只有在计数空间固定以后才具有确定意义。对 Riemann 零点结构，本章固定以下三种计数。

4.1 事件表示叶数

在有限视界事件中，一个互反关系可表现为两张互反表示叶。若记完整事件为 E，则其表示层可以写成

$$E \rightsquigarrow (E_+, E_-). \tag{4.1}$$

这里的

$$\nu_{\mathrm{sheet}}(E) \tag{4.2}$$

记录的是事件表示的叶数。它属于事件表示，不属于零点除子。

4.2 支撑地址计数

不同零点支撑

$$Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)$$

是集合而非按重数展开的多重集。故对

$$\rho \in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)$$

定义

$$\boxed{\mu_{\mathrm{supp}}(\rho) = 1.} \tag{4.3}$$

这表示每个不同零点地址在支撑中只记录一次。

4.3 解析重数

解析重数为

$$m_\rho = \mathrm{ord}_\rho \xi. \tag{4.4}$$

它可以是任意正整数，且通过除子权重保留：

$$\mathcal{D}_\xi^{\mathrm{nt}} = \sum_\rho m_\rho\,[\rho]. \tag{4.5}$$

因此得到本章的基本分层式：

$$\boxed{\nu_{\mathrm{sheet}}(E) \neq \mu_{\mathrm{supp}}(\rho) \neq m_\rho \quad \text{作为对象类型.}} \tag{4.6}$$

定理 4.1（三层重数分离定理）

有限互反提升中的表示叶数、不同零点支撑中的地址计数以及零点除子中的解析重数，分别由事件表示、支撑集合和局部消失阶定义。任何一层的计数变化均不自动改变另外两层。

证明。 事件表示叶数由事件表示的分支结构定义；支撑地址计数由集合

$$Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)$$

定义；解析重数由局部因子分解 (3.2) 定义。三者的定义域、陪域与等价关系均不同，因此不存在由其中任一计数值自动推出另外两者相等的类型同一。证毕。

5. 互反表示与地址保真

移动视界中的互反两翼表达同一完整事件的互反角色。记互反作用为

$$J: E_+ \leftrightarrow E_-. \tag{5.1}$$

终端解析层的相应互反作用读作

$$\iota(\rho) = 1 - \overline{\rho}. \tag{5.2}$$

在固定角色读数上，

$$\iota(\rho) = \rho,$$

从而

$$\Re\rho = \frac{1}{2}. \tag{5.3}$$

这里需要区分“角色互反”与“地址复制”。E_+ 与 E_- 是一个事件的两个互反角色；当它们在终端固定角色读数（fixed-role readout） 上闭合时，闭合表示该角色读数在对合 ι 下固定 而不是生成两个相同零点地址再把二者合并。

定理 5.1（互反表示的地址保真）

设完整事件 E 的互反角色经中心化参数精确传导进入终端解析表示，并在固定角色读数上给出零点地址 ρ。则互反表示的叶数不改变该终端地址在

$$Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)$$

中的支撑计数：

$$\boxed{\mu_{\mathrm{supp}}(\rho) = 1.} \tag{5.4}$$

其解析重数仍独立记录为

$$m_\rho = \mathrm{ord}_\rho \xi. \tag{5.5}$$

证明。 互反角色属于同一事件的表示层；中心化参数精确传导保持其事件参数身份；终端读数给出一个确定的解析地址 ρ。支撑集合按不同地址建立，因此同一地址只出现一次。局部解析阶由 (3.2) 独立给出，不由互反表示叶数决定。证毕。

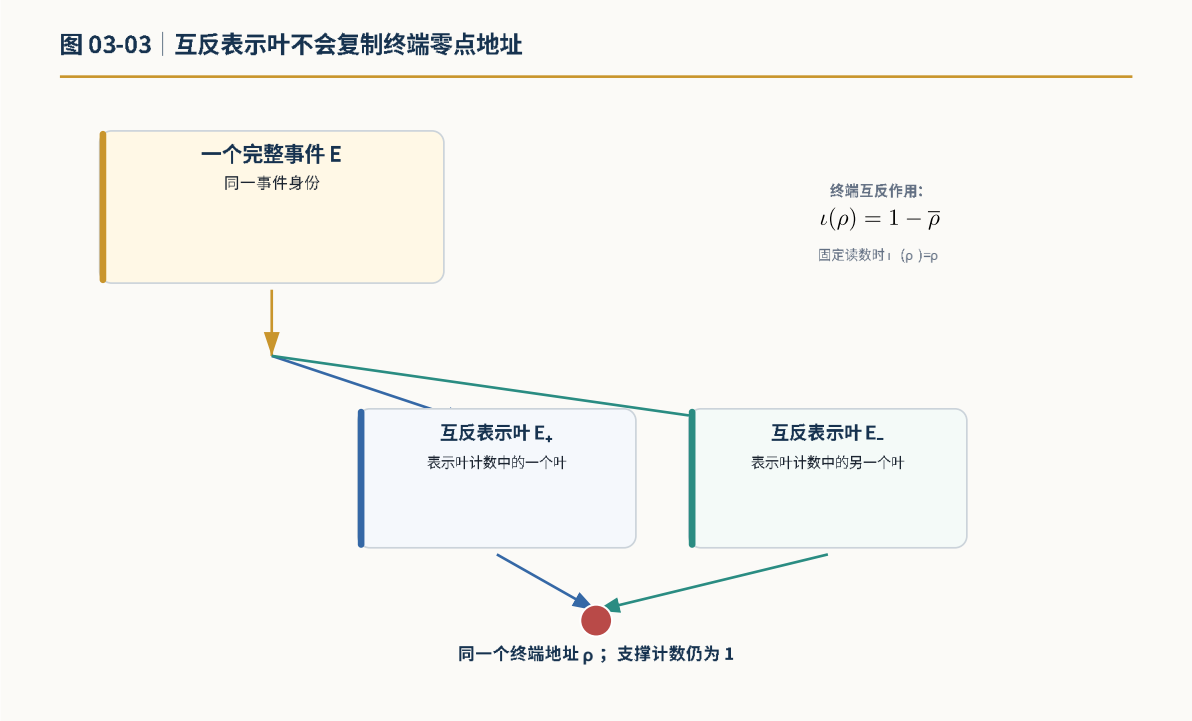


图 03-03　互反表示叶与终端地址。一个完整事件可在有限视界中展开为 E_+ 与 E_- 两张互反表示叶，但它们仍属于同一事件身份。固定角色终端读数给出同一个解析地址 ρ，因此支撑层仍是 $\mu_{\mathrm{supp}}(\rho) = 1$；解析重数 m_ρ 则独立保留在除子层。

6. 完整区间与端点地址

设 RH 闭合后的正高度不同零点按严格递增次序写为

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots, \tag{6.1}$$

并记

$$\rho_k = \frac{1}{2} + i\gamma_k. \tag{6.2}$$

相邻零点区间为

$$I_k = (\gamma_k, \gamma_{k+1}). \tag{6.3}$$

在开放乘法视界的终端解析读数中，一个完整区间由两个不同的边界地址确定：

$$\partial I_k = \{\rho_k, \rho_{k+1}\}. \tag{6.4}$$

定理 6.1（Single-Interval Support-Address Theorem）

对任意完整相邻零点区间 I_k，其边界支撑恰由两个不同地址组成：

$$\boxed{\partial I_k = \{\rho_k, \rho_{k+1}\}.} \tag{6.5}$$

若端点的解析重数分别为

$$m_k = \mathrm{ord}_{\rho_k}\xi, \qquad m_{k+1} = \mathrm{ord}_{\rho_{k+1}}\xi, \tag{6.6}$$

则相应边界除子为

$$\boxed{\mathcal{D}_{\partial I_k} = m_k[\rho_k] + m_{k+1}[\rho_{k+1}].} \tag{6.7}$$

因此，区间边界的支撑基数为 2，而边界除子总重数为

$$m_k + m_{k+1}. \tag{6.8}$$

证明。 由相邻零点的严格排序，

$$\gamma_k < \gamma_{k+1},$$

故

$$\rho_k \neq \rho_{k+1}.$$

支撑按 distinct address 计数，因此边界包含两个元素。解析重数由各端点的局部消失阶定义，并以除子权重形式进入 (6.7)。证毕。

7. 相邻区间的共享边界与去重

相邻两个区间为

$$I_k = (\gamma_k, \gamma_{k+1}), \qquad I_{k+1} = (\gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}). \tag{7.1}$$

它们共享同一个解析地址

$$\rho_{k+1} = \frac{1}{2} + i\gamma_{k+1}. \tag{7.2}$$

局部区间账本分别写为

$$\partial I_k = \{\rho_k, \rho_{k+1}\},$$

$$\partial I_{k+1} = \{\rho_{k+1}, \rho_{k+2}\}. \tag{7.3}$$

全局支撑通过集合并集形成：

$$\partial I_k \cup \partial I_{k+1} = \{\rho_k, \rho_{k+1}, \rho_{k+2}\}. \tag{7.4}$$

因此，

$$\boxed{\rho_{k+1}^{(I_k)} = \rho_{k+1}^{(I_{k+1})} = \rho_{k+1}} \tag{7.5}$$

只是同一地址在两个局部区间中的两次引用，不构成两个支撑原子。

定理 7.1（Shared-Boundary Deduplication）

对任意有限相邻区间链

$$I_k, I_{k+1}, \dots, I_{k+r},$$

其全局支撑为

$$\boxed{\bigcup_{j=k}^{k+r} \partial I_j = \{\rho_k, \rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+r+1}\}.} \tag{7.6}$$

每个内部共享端点在支撑并集中恰出现一次。

证明。 逐次使用集合并集的幂等律

$$\{x\} \cup \{x\} = \{x\}$$

即可。证毕。

图 03-04｜相邻区间共享边界：局部重复引用，全局支撑自动去重

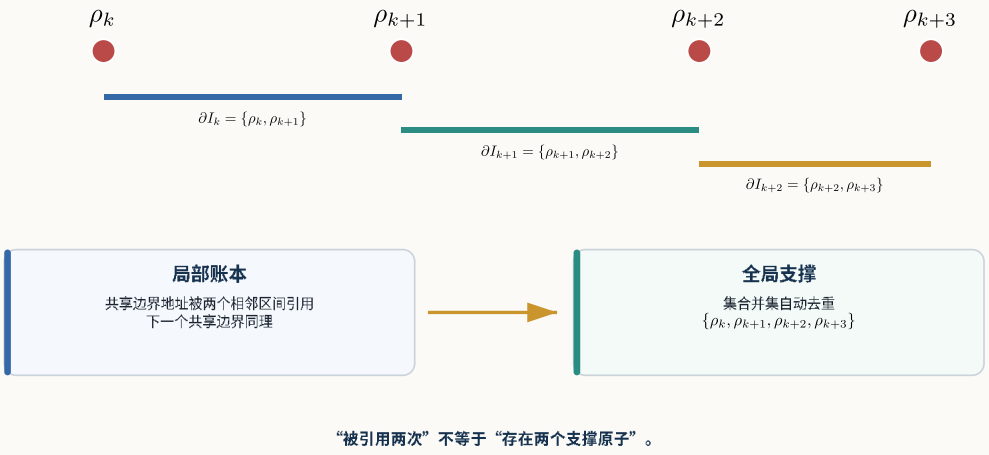


图 03-04　共享边界去重。 相邻区间 I_k 与 I_{k+1} 都引用同一个边界地址 ρ_{k+1}，这只是同一地址在两个局部账本中的重复出现。形成全局支撑时采用集合并集，幂等律自动去重，因此共享边界不会产生第二个支撑原子。

8. 从局部地址到全局支撑

定义正高度不同零点支撑

$$\boxed{\Gamma_+ = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}.} \tag{8.1}$$

对应复零点支撑为

$$Z_+ = \left\{\frac{1}{2} + i\gamma_k : k \geq 1\right\}. \tag{8.2}$$

完整相邻区间族满足

$$I_k = (\gamma_k, \gamma_{k+1}), \tag{8.3}$$

故所有局部区间边界的并集恢复整个正高度支撑：

$$\boxed{Z_+ = \bigcup_{k\geq 1} \partial I_k.} \tag{8.4}$$

若把解析重数同时保留，则正高度零点除子为

$$\boxed{\mathcal{D}_\xi^+ = \sum_{k\geq 1} m_k\,[\rho_k].} \tag{8.5}$$

式 (8.4) 与 (8.5) 给出两种不同但兼容的全局对象：

$$\boxed{\begin{array}{ll} Z_+ & : \text{ 身份保真的支撑,} \\ \mathcal{D}_\xi^+ & : \text{ 除子保真的零点数据.} \end{array}} \tag{8.6}$$

前者每个不同地址出现一次；后者在同一地址上保留完整解析重数。

9. 支撑计数与除子计数

对不穿过零点的 $T > 0$，定义不同支撑计数

$$\boxed{N_{\mathrm{supp}}(T) = \#\{\rho \in Z_+ : 0 < \Im\rho \leq T\}.} \tag{9.1}$$

定义除子加权计数

$$\boxed{N_{\mathrm{div}}(T) = \sum_{\substack{\rho\in Z_+ \\ 0<\Im\rho\leq T}} m_\rho\,.} \tag{9.2}$$

显然

$$N_{\mathrm{div}}(T) = N_{\mathrm{supp}}(T) + \sum_{\substack{\rho\in Z_+ \\ 0<\Im\rho\leq T}} (m_\rho - 1). \tag{9.3}$$

于是得到：

定理 9.1（Support–Divisor Counting Identity）

$$\boxed{N_{\mathrm{div}}(T) - N_{\mathrm{supp}}(T) = \sum_{\substack{\rho\in Z_+ \\ 0<\Im\rho\leq T}} (m_\rho - 1) \geq 0.} \tag{9.4}$$

等号成立当且仅当高度 T 以下的全部零点均解析简单。

证明。 由每个

$$m_\rho \in \mathbb{N}, \qquad m_\rho \geq 1,$$

逐项分解

$$m_\rho = 1 + (m_\rho - 1)$$

并求和即得。证毕。

推论 9.2（解析简单性的精确判据）

以下条件等价：

1. 全部非平凡零点解析简单；
2. 对每个 $\rho \in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)$，有

$$m_\rho = 1;$$

3. 对所有不穿过零点的 $T > 0$，有

$$N_{\mathrm{div}}(T) = N_{\mathrm{supp}}(T);$$

4. 非平凡零点除子为约化除子（reduced divisor）：

$$\mathcal{D}_\xi^{\mathrm{nt}} = \sum_{\rho \in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)} [\rho].$$

这个判据把“地址唯一性”与“解析简单性”彻底分离。地址唯一性是支撑层事实；解析简单性是除子权重全部等于 1 的附加性质。

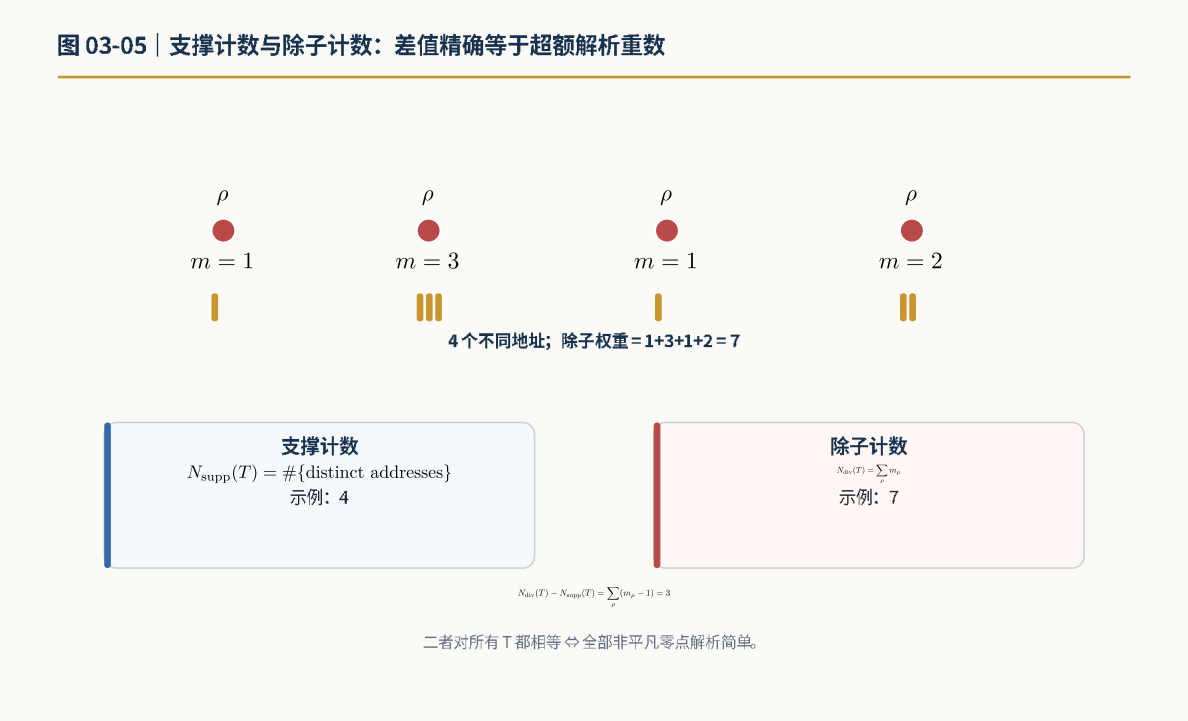


图 03-05　支撑计数与除子计数。$N_{\mathrm{supp}}(T)$ 只数不同零点地址，而 $N_{\mathrm{div}}(T)$ 按解析重数加权。二者之差精确等于 $\sum(m_\rho - 1)$。因此“每个地址唯一”并不意味着“每个零点简单”；只有当所有 $m_\rho = 1$ 时，支撑计数与除子计数才对所有高度完全一致。

10. 辐角原理与有限高度重数核对

对不经过零点的闭合轮廓，辐角原理（argument principle） 给出按解析重数计数的零点总数。应用到 Riemann ξ 的标准有限高度区域，可得到按解析重数加权的零点计数，即本章记号中的

$$N_{\mathrm{div}}(T). \tag{10.1}$$

另一方面，若通过零点定位得到所有不同零点地址，则得到

$$N_{\mathrm{supp}}(T). \tag{10.2}$$

两者的差

$$N_{\mathrm{div}}(T) - N_{\mathrm{supp}}(T) \tag{10.3}$$

按照定理 9.1 精确等于超额解析重数（excess analytic multiplicity）：

$$\sum_{0<\Im\rho\le T} (m_\rho - 1). \tag{10.4}$$

Turing 型方法属于对有限高度零点计数完整性的经典认证工具；在本章的分层记号下，它所认证的计数与辐角原理（argument principle） 的 multiplicity-weighted count 同属除子层。若再结合独立的不同零点定位，则可在有限窗口中比较除子计数与 支撑计数，从而判定该窗口是否存在 excess multiplicity。

因此，有限高度零点认证与本章的三层分离使用同一基本账本：

$$\boxed{\text{不同地址支撑} \quad + \quad \text{除子权重}.} \tag{10.5}$$

11. 与第二章零点间隔几何的接口

第二章（H02）统一采用相邻实零点纵坐标

$$\gamma_k < \gamma_{k+1}$$

以及解析重数

$$m_k = \mathrm{ord}_{\gamma_k}\Xi = \mathrm{ord}_{\rho_k}\xi. \tag{11.1}$$

其中

$$\rho_k = \frac{1}{2} + i\gamma_k. \tag{11.2}$$

因此，第二章的间隔边界形状读取的是除子层的解析重数 m_k，而不是事件表示叶数。相邻间隔共享一个零点时，共享的是同一支撑地址 ρ_k；其解析重数 m_k 作为该地址上的局部除子权重被两侧边界一致读取。

由此形成统一接口：

$$\boxed{\text{共享边界地址} \quad + \quad \text{解析重数}} \tag{11.3}$$

相邻区间对同一边界地址的重复引用不增加新的零点支撑原子。

12. 与第五至第九章谱对象的接口

对正高度零点，把不同纵坐标写成

$$\Gamma_+ = \{\gamma_n\}_{n\geq 1}, \tag{12.1}$$

并保留解析重数序列

$$\{m_n\}_{n\geq 1}. \tag{12.2}$$

定义身份支撑 Hilbert 空间

$$\mathcal{H}_{\mathrm{id}} = \ell^2(\Gamma_+), \tag{12.3}$$

其规范基向量 e_n 每个不同地址只出现一次。定义纵坐标算子

$$H_{\mathrm{id}} e_n = \gamma_n e_n. \tag{12.4}$$

同时定义重数算子

$$\boxed{M_{\mathrm{mult}} e_n = m_n e_n.} \tag{12.5}$$

于是

$$(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \tag{12.6}$$

把支撑地址与解析重数两层零点数据分离表示：

$$\boxed{H_{\mathrm{id}} \leftrightarrow \text{不同零点地址},} \tag{12.7}$$

$$\boxed{M_{\mathrm{mult}} \leftrightarrow \text{解析重数}.} \tag{12.8}$$

若需要除子保真的本征空间维数，则可作重数放大：

$$\widetilde{H} = \oplus_n \gamma_n I_{m_n}, \tag{12.9}$$

从而

$$\dim\ker(\widetilde{H} - \gamma_n I) = m_n. \tag{12.10}$$

因此：

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{身份保真的谱} \quad : \quad \gamma_n \text{每个不同地址一次},\\ \text{除子保真的谱} \quad : \quad \gamma_n \text{按} m_n \text{放大}.\end{array}} \tag{12.11}$$

全部零点解析简单当且仅当

$$\boxed{M_{\mathrm{mult}} = I,} \tag{12.12}$$

此时身份保真与除子保真两种谱实现的重数层一致。

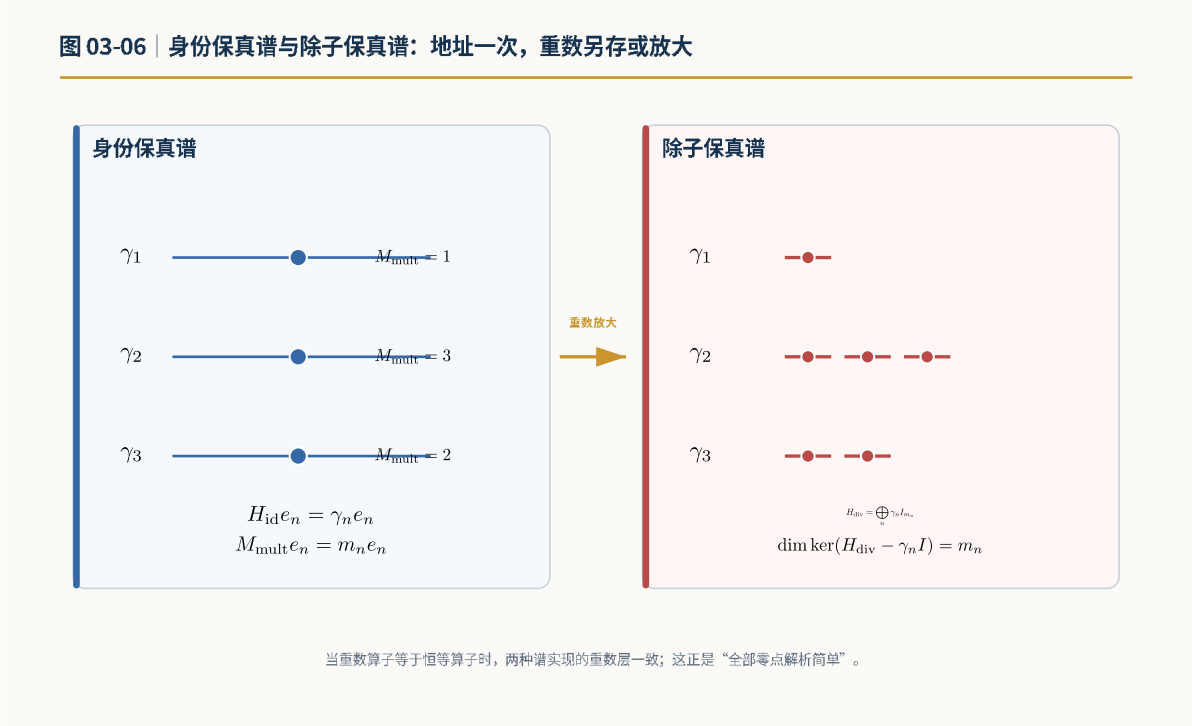


图 03-06　身份保真谱与除子保真谱。 在身份保真实现 $(H_{\text{id}}, M_{\text{mult}})$ 中，每个 distinct ordinate γ_n 只作为一个谱地址出现，而解析重数由独立的 M_{mult} 保存；需要除子保真本征空间维数时，再作重数放大 $\widetilde{H} = \oplus_n \gamma_n I_{m_n}$。两种实现只有在 $M_{\text{mult}} = I$ 时才在重数层一致。

13. 主定理：地址—叶数—解析重数分层

定理 13.1（Riemann 零点地址—表示叶数—解析重数分离定理）

在开放乘法、中心化参数精确传导、移动视界互反表示与终端零点读数的统一表示链中，对任意非平凡零点

$$\rho \in Z_{\text{nt}}^{\text{dist}}(\xi)$$

都有以下三层结构：

$$\boxed{\begin{aligned} \nu_{\text{sheet}}(E) &= \text{有限互反事件的表示叶数}, \\ \mu_{\text{supp}}(\rho) &= 1, \\ m_\rho &= \text{ord}_\rho \xi. \end{aligned}} \tag{13.1}$$

其中：

1. 互反表示叶表示同一事件的角色展开，不增加不同零点地址；
2. 相邻区间对共享边界的重复引用经集合并集自动去重；
3. 每个不同零点地址在支撑中只出现一次；
4. 解析重数独立保存在零点除子

$$\mathcal{D}_\xi^{\text{nt}} = \sum_\rho m_\rho [\rho]$$

中；

5. 支撑地址唯一性不蕴含 $m_\rho = 1$；

6. 解析简单性等价于

$$m_\rho = 1 \quad \forall \rho,$$

等价于

$$M_{\mathrm{mult}} = I.$$

证明。 (1) 由互反表示的事件层定义得到。

(2) 由定理 7.1 的共享边界去重得到。

(3) 由不同地址支撑的定义及定理 5.1 的地址保真得到。

(4) 由局部因子分解 (3.2) 与除子定义 (3.5) 得到。

(5) 因为支撑计数与解析消失阶属于不同对象层。

(6) 由推论 9.2 与重数算子的定义 (12.5) 得到。

证毕。

14. 结论

Riemann 零点的计数首先取决于所处层级。统一分层为

$$\boxed{\text{表示叶数} \neq \text{支撑地址计数} \neq \text{解析重数}.}$$

开放乘法视界中的互反两翼属于事件表示；终端非平凡零点

$$\rho$$

属于解析支撑；局部消失阶

$$m_\rho$$

属于零点除子。三者在同一生成—表示链中相互关联，但不发生类型混同。

由此，非平凡零点的完整数据自然分成

$$\boxed{Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi) \quad \text{与} \quad \mathcal{D}_\xi^{\mathrm{nt}} = \sum_\rho m_\rho \, [\rho].}$$

前者是身份保真的支撑，每个不同地址记录一次；后者是除子保真的零点数据，在同一地址上保留解析重数。

有限高度上，两种计数满足

$$\boxed{N_{\mathrm{div}}(T) - N_{\mathrm{supp}}(T) = \sum_{0<\Im\rho\le T} (m_\rho - 1).}$$

因此，地址唯一性与解析简单性的逻辑关系为：前者固定不同地址支撑，后者要求全部除子权重等于 1。

这一分层同时统一了相邻零点间隔中的边界重数、闭合后的裸支撑与除子数据，以及谱表示中的

$$(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$$

结构。Riemann 零点的地址、表示与重数由此进入同一套无歧义对象账本。

第四章　Riemann 闭合核的参数化与广义黎曼猜想的证明

——互反角色保真、终端固定读数与最小身份迁移

摘要

第一章（H01）的 Riemann 闭合论证可形式化为一个由开放乘法关系、中心化参数、互反角色、完整事件、完成解析对象与终端零点读数组成的最小闭合核。本章给出这一闭合核的参数化形式及其一般适用条件。

设 $\mathfrak{E}$ 为完整事件域。每个事件 $E \in \mathfrak{E}$ 带角色空间 X_E 与互反对合

$$J_E : X_E \to X_E, \qquad J_E^2 = \mathrm{id}.$$

同一事件经过一列表示

$$\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_N,$$

各层同时携带中心化参数与互反角色读法。若相邻表示迁移保持中心化参数，并与各层互反作用交换，则参数身份与角色归属沿整个表示链保持不变。

完整事件还具有由生成源几何确定的固定角色

$$R_E \in X_E, \qquad J_E R_E = R_E.$$

终端解析表示带规范互反对合

$$\iota_c(s) = 2c - \overline{s}.$$

若终端读数

$$\Phi_E : X_E \to \mathbb{C}$$

保持互反角色，

$$\Phi_E(J_E R) = \iota_c(\Phi_E(R)),$$

则对生成源固定角色 R_E 得到

$$\Phi_E(R_E) = \iota_c(\Phi_E(R_E)).$$

因此

$$\Re \Phi_E(R_E) = c.$$

终端闭合（terminal closure）定义为生成源固定角色经互反角色保真后在解析表示中取得固定角色读数；它由上述两个条件直接给出。

若完成对象还满足终端穷尽性，即全部目标零点均由完整事件的终端固定角色读数给出，则

$$\forall \rho \in Z_{\mathrm{target}}, \qquad \Re \rho = c.$$

由此得到最小七条件闭合核：

K1 根身份与互反角色系统， K2 中心化互反表示,

K3 中心化参数精确传导， K4 互反角色保真,

K5 完整事件的生成源固定角色， K6 零点保真的完成对象与终端穷尽,

K7 规范解析互反对合.

Riemann 实现中，根身份为自然数乘法

$$\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq,$$

互反角色由

$$J(m,q) = (q,m)$$

给出；平方视界满足

$$m > k, \quad q > k, \quad mq \le (k+1)^2 \Rightarrow m = q = k+1,$$

从而产生生成源固定角色；终端解析对合为

$$\iota_{1/2}(\rho) = 1 - \overline{\rho}.$$

因此终端固定角色读数满足

$$\rho = 1 - \overline{\rho},$$

即

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

本章进一步把这一参数化核应用于广义黎曼猜想的 Dirichlet 情形。这里不使用

$$\mathrm{RH} \Rightarrow \mathrm{GRH}$$

这一错误推理，而只验证一个最小迁移事实：Dirichlet character 并没有产生第二个根乘法身份。对任意 character χ，定义互反 特征包

$$\mathfrak{P}_{\chi} = \{\chi, \overline{\chi}\},$$

它只是同一根乘法身份上的通道数据。加权中心核

$$W_{\chi,z}(m,q) = \chi(m)\overline{\chi(q)}m^{-1/2-z}q^{-1/2+z}$$

满足精确互反

$$(m,q,\chi,z) \leftrightarrow (q,m,\overline{\chi},-z),$$

而全局编码、moving head/tail 与标准 完成化 均保持同一个中心化参数 z。对 本原 Dirichlet 特征，函数方程与共轭结构给出同一 χ-零点集上的终端解析对合

$$\rho \mapsto 1-\overline{\rho}.$$

因此 Dirichlet lift 逐项满足 K1 – K7，且平方视界固定角色因只依赖 $mq=n$ 而原样继承。由定理 18.1，

$$L(\rho,\chi)=0, \qquad 0<\Re\rho<1 \Rightarrow \Re\rho=\frac{1}{2}.$$

imprimitive 与 主特征 再由有限 Euler factors 归约；这些附加因子的零点位于 $\Re s=0$，不在开放临界带中。本章所称 GRH 均指这一 Dirichlet–GRH。

本章同时冻结坐标类型：有限视界事件提升的横向坐标记为 $d_E(\tau)$，实际零点相对临界线的横向位移记为

$$d_\rho=\Re\rho-\frac{1}{2},$$

二者不作对象同一或数值传递。由此，Riemann 闭合核被压缩为一条严格的形式链：

$$\boxed{\text{生成源固定角色}+\text{互反角色保真}+\text{终端穷尽}\Rightarrow\text{全局固定角色读数.}}$$

1. 参数化对象与逻辑位置

沿用第一章（H01）的记号，自然数乘法根身份记为

$$\boxed{\mathfrak{I}_\times=(\mathbb{N}_{>0},\mu), \qquad \mu(m,q)=mq.} \tag{1.1}$$

开放乘法关系

$$\mathcal{R}_\times=\mathrm{Graph}(\mu)=\{(m,q,n):mq=n\} \tag{1.2}$$

是这一根身份的关系表示。沿狄利克雷、Mellin、乘法壳层、移动视界、ζ、Riemann 完成化与零点读数展开时，根身份保持不变，表示形式与角色读数逐层变化。

本章将第一章具体闭合链中承担终端固定读数的结构写成参数化闭合核。核心对象分为四层：

$$\boxed{\text{root identity} \ \rightarrow\ \text{event} \ \rightarrow\ \text{role} \ \rightarrow\ \text{role-reading.}} \tag{1.3}$$

其中：

1. **root identity** 给出统一生成关系；
2. **event** 是该身份内部的一次完整关系履历；
3. **role** 是互反作用在事件内部确定的位置；
4. **role-reading** 是同一角色在某个具体表示层中的坐标或解析读数。

全书采用

$$\boxed{\text{身份}\neq\text{角色}\neq\text{角色读数.}} \tag{1.4}$$

参数化由此给出不同类型对象在表示变化中保持同一性的条件。

2. 根互反系统

定义 2.1（根互反角色系统）

设 $\mathfrak{I}$ 为根身份，X 为其关系表示中的角色空间，并设

$$J: X \to X \tag{2.1}$$

满足

$$\boxed{J^2 = \mathrm{id}_X.} \tag{2.2}$$

称

$$(\mathfrak{I}, X, J) \tag{2.3}$$

为根互反角色系统。

Riemann 实现中，

$$X = \mathcal{R}_\times, \qquad J(m,q,n) = (q,m,n). \tag{2.4}$$

固定角色集合为

$$\mathrm{Fix}(J) = \{x \in X : Jx = x\}. \tag{2.5}$$

定义 2.2（互反归一化读数）

设

$$u: X \to \mathbb{R}$$

满足

$$u(Jx) = L - u(x) \tag{2.6}$$

其中 $L > 0$。若 $x \in \mathrm{Fix}(J)$，则

$$u(x) = \frac{L}{2}. \tag{2.7}$$

Riemann 归一化中 $L = 1$，故固定角色读数为

$$u = \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

定义 2.3（反对称关系坐标）

若

$$R: X \to \mathbb{R}$$

满足

$$\boxed{R(Jx) = -R(x),} \tag{2.9}$$

则称 R 为反对称关系坐标。

对固定角色，

$$Jx = x \Rightarrow R(x) = 0. \tag{2.10}$$

Riemann 乘法表示中的标准选择为

$$R(m,q) = \log \frac{q}{m}. \tag{2.11}$$

式 (2.8) 与 (2.10) 是同一互反固定关系在两种生成源坐标中的不同读数。

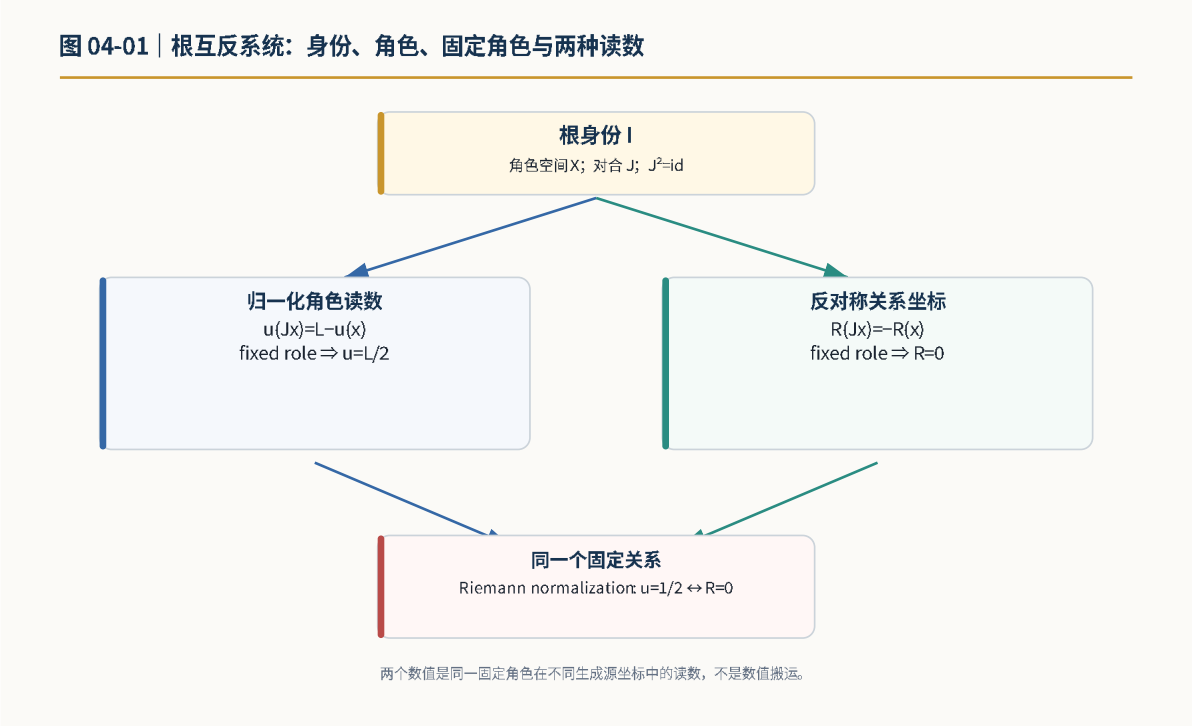


图 04-01　根互反系统。根身份 $\Im$ 上的角色对合 $J^2=\mathrm{id}$ 同时允许两类生成源读数：归一化角色 $u(Jx)=L-u(x)$ 在固定角色上读为 $L/2$，反对称关系坐标 $R(Jx)=-R(x)$ 在固定角色上读为 0。Riemann 情形的 $u=1/2$ 与 $R=0$ 是同一固定关系的两种读法，而不是一个数值沿表示链被搬运到终端。

3. 中心化互反表示

定义 3.1（中心化互反核）

设 $z\in\mathbb{C}$。若函数族

$$K_z: X\to\mathbb{C}$$

满足

$$\boxed{K_z(Jx)=K_{-z}(x),} \tag{3.1}$$

则称 $\{K_z\}$ 为中心化互反核。

Riemann 实现为

$$\boxed{K_z(m,q)=m^{-1/2-z}q^{-1/2+z}=(mq)^{-1/2}e^{z\log(q/m)}.} \tag{3.2}$$

交换 m,q 得

$$K_z(q,m)=K_{-z}(m,q). \tag{3.3}$$

引理 3.2（互反聚合偶性）

若 $D\subset X$ 在 J 下不变，且

$$A_D(z)=\sum_{x\in D}K_z(x) \tag{3.4}$$

绝对收敛，则

$$\boxed{A_D(z) = A_D(-z).} \tag{3.5}$$

证明。 由于 $J: D \to D$ 为双射，

$$A_D(z) = \sum_{x \in D} K_z(Jx) = \sum_{x \in D} K_{-z}(x) = A_D(-z).$$

证毕。

4. 双通道解析编码

中心化互反核进入解析表示后，参数 z 以 $+z$ 与 $-z$ 的互反方式进入两个通道。

定义 4.1（互反解析通道对）

设 F_+、F_- 为解析对象，令

$$w_+(z) = a + c + z, \qquad w_-(z) = a + c - z. \tag{4.1}$$

若全局编码写为

$$\boxed{\mathcal{G}_a(z) = F_+(w_+(z))F_-(w_-(z)),} \tag{4.2}$$

且互反作用交换两通道，则称其为互反解析通道对。

Riemann 实现中

$$F_+ = F_- = \zeta, \qquad c = \frac{1}{2}, \tag{4.3}$$

并有

$$\sum_{n \geq 1} a_n(z) n^{-a} = \zeta\left(a + \frac{1}{2} + z\right)\zeta\left(a + \frac{1}{2} - z\right). \tag{4.4}$$

这里保持的是同一个中心化参数在 互反通道中的成对出现；生成源 reciprocal coordinate 与终端零点坐标始终保持各自的坐标类型。

5. 同一事件的多层表示

生成源、analytic 与 terminal 层统一写为同一事件域上的多层表示。

定义 5.1（完整事件域）

设

$$\mathfrak{E} \tag{5.1}$$

为完整事件集合。对每个

$$E \in \mathfrak{E},$$

记其角色空间为

$$X_E, \tag{5.2}$$

互反作用为

$$J_E: X_E \to X_E, \qquad J_E^2 = \mathrm{id}. \tag{5.3}$$

事件 E 在第 j 层的表示记为

$$\mathcal{R}_j(E), \qquad j = 0,1,\dots,N. \tag{5.4}$$

因此，

$$\boxed{E_{\text{生成源}} \equiv E_{\text{analytic}} \equiv E_{\text{terminal}} \equiv E} \tag{5.5}$$

表示同一事件履历在生成源、analytic 与 terminal 三个表示层中的连续读法。

定义 5.2（表示迁移）

相邻表示之间设有确定映射

$$T_{j+1}: \mathcal{R}_j(E) \to \mathcal{R}_{j+1}(E). \tag{5.6}$$

总表示迁移为

$$T = T_N \circ \cdots \circ T_1. \tag{5.7}$$

表示迁移改变编码方式，但不改变事件身份 E。

6. 中心化参数精确传导

每个表示层带中心化参数读数

$$z_j: \mathcal{R}_j(E) \to \mathbb{C}. \tag{6.1}$$

定义 6.1（中心化参数精确传导）

若对每个 j 有

$$\boxed{z_{j+1} \circ T_{j+1} = z_j,} \tag{6.2}$$

则称相邻表示迁移保持中心化参数。

定理 6.2（参数保真的复合性）

若每一层均满足 (6.2)，则

$$\boxed{z_N \circ T = z_0.} \tag{6.3}$$

证明。 逐层代入：

$$z_N T_N \cdots T_1 = z_{N-1} T_{N-1} \cdots T_1 = \cdots = z_0.$$

证毕。

Riemann 表示链中，可压缩写为

$$\boxed{z_{\text{Mellin}} = z_{\text{shell}} = z_{\text{Dirichlet}} = z_{\text{head/tail}} = z_{\text{完成化}} = z_{\text{terminal}}.} \tag{6.4}$$

式 (6.4) 表示中心化参数在各表示层保持同一。

7. 互反角色保真

参数相同并不自动意味着角色归属相同。闭合核因此需要独立的互反角色保真。

设第 j 层表示带互反作用

$$J_j: \mathcal{R}_j(E) \to \mathcal{R}_j(E), \qquad J_j^2 = \mathrm{id}. \tag{7.1}$$

定义 7.1（互反角色保真）

若

$$\boxed{T_{j+1} \circ J_j = J_{j+1} \circ T_{j+1},} \tag{7.2}$$

则称 T_{j+1} 保持互反角色。

定理 7.2（角色保真的复合性）

若所有相邻迁移均满足 (7.2)，则总迁移 T 满足

$$\boxed{T \circ J_0 = J_N \circ T.} \tag{7.3}$$

证明。

$$\begin{aligned} TJ_0 &= T_N \cdots T_2 (T_1 J_0) \\ &= T_N \cdots T_2 (J_1 T_1) \\ &= \cdots \\ &= J_N T_N \cdots T_1 \\ &= J_N T. \end{aligned}$$

证毕。

推论 7.3（固定角色的表示保真）

若

$$x \in \mathrm{Fix}(J_0), \tag{7.4}$$

则

$$T(x) \in \mathrm{Fix}(J_N). \tag{7.5}$$

证明。 由

$$J_0 x = x$$

及 (7.3)，

$$J_N T(x) = T J_0(x) = T(x).$$

证毕。

这一定理说明：固定角色的“固定性”可以沿等变表示链传导，而不需要在每个终端表示中重新选择角色。

8. 完整事件与生成源固定角色

完整事件是否取得固定角色由具体载体几何决定。

定义 8.1（完整事件的生成源固定角色）

对每个

$$E \in \mathfrak{E},$$

若存在由生成源事件几何确定的角色

$$R_E \in X_E \tag{8.1}$$

满足

$$\boxed{J_E R_E = R_E,} \tag{8.2}$$

则称 R_E 为事件 E 的生成源固定角色。

条件 (8.2) 是完整事件几何的一部分，由载体与事件边界的具体结构决定。

定理 8.2（Riemann 平方视界固定角色）

对任意整数 $k \geq 1$，若

$$m > k, \qquad q > k, \qquad mq \leq (k+1)^2, \tag{8.3}$$

则

$$\boxed{m = q = k+1.} \tag{8.4}$$

因此平方视界端点角色是

$$J(m,q) = (q,m)$$

的固定角色。

证明。 由

$$m > k, \quad q > k$$

得

$$m \geq k+1, \qquad q \geq k+1,$$

从而

$$mq \geq (k+1)^2.$$

与

$$mq \leq (k+1)^2$$

合并，得到

$$mq = (k+1)^2.$$

又因 $m, q \geq k+1$，只能有

$$m = q = k+1.$$

证毕。

同理，下一平方截面给出

$$m = q = k+2. \tag{8.5}$$

这一整数不等式是 Riemann 实现中 K5 的具体载体几何。

9. 终端解析互反对合

设目标完成解析对象的零点读数位于复平面，并给定实常数 c。

定义 9.1（规范解析互反对合）

定义

$$\boxed{\iota_c(s) = 2c - \overline{s}.} \tag{9.1}$$

显然

$$\iota_c^2 = \mathrm{id}. \tag{9.2}$$

引理 9.2（解析固定集）

$$\boxed{\mathrm{Fix}(\iota_c) = \{s \in \mathbb{C} : \Re s = c\}.} \tag{9.3}$$

证明。 设

$$s = \sigma + i\gamma.$$

则

$$s = \iota_c(s)$$

等价于

$$\sigma + i\gamma = 2c - \sigma + i\gamma,$$

故

$$\sigma = c.$$

反向显然。证毕。

Riemann 情形取

$$c = \frac{1}{2}, \tag{9.4}$$

得到

$$\boxed{\iota_{1/2}(s) = 1 - \overline{s},} \tag{9.5}$$

其固定集为

$$\Re s = \frac{1}{2}. \tag{9.6}$$

10. 终端角色读数

对每个完整事件 E，设终端表示的角色读数为

$$\Phi_E : X_E \to \mathbb{C}. \tag{10.1}$$

定义 10.1（终端互反角色保真）

若对任意

$$R \in X_E$$

有

$$\boxed{\Phi_E(J_E R) = \iota_c(\Phi_E(R)),} \tag{10.2}$$

则称终端角色读数保持互反角色。

这一条件是整个表示链角色保真在终端解析层的最终读法。

11. 核心定理：终端固定角色读数

定理 11.1（互反角色保真与终端固定读数定理）

设 $E \in \mathfrak{E}$ 为完整事件，并满足：

1. $R_E \in X_E$ 是生成源固定角色：

$$J_E R_E = R_E;$$

2. 终端读数 Φ_E 保持互反角色：

$$\Phi_E(J_E R) = \iota_c(\Phi_E(R)).$$

则

$$\rho_E := \Phi_E(R_E) \tag{11.1}$$

满足

$$\boxed{\rho_E = \iota_c(\rho_E),} \tag{11.2}$$

从而

$$\boxed{\Re\rho_E = c.} \tag{11.3}$$

证明。 由

$$J_E R_E = R_E$$

及互反角色保真，

$$\begin{aligned} \rho_E &= \Phi_E(R_E) \\ &= \Phi_E(J_E R_E) \\ &= \iota_c(\Phi_E(R_E)) \\ &= \iota_c(\rho_E). \end{aligned}$$

由引理 9.2，

$$\Re\rho_E = c.$$

证毕。

推论 11.2（终端闭合）

在定理 11.1 的条件下，事件 E 的终端角色读数落入

$$\mathrm{Fix}(\iota_c). \tag{11.4}$$

本章称这一事实为**终端闭合**（terminal closure）。

因此，terminal closure 由

$$\boxed{\text{生成源固定角色} + \text{互反角色保真}} \tag{11.5}$$

直接推出。

推论 11.3（终端闭合等式）

在定理 11.1 的条件下，

$$\boxed{\Phi_E(J_E R_E) = \Phi_E(R_E) = \iota_c(\Phi_E(R_E)).} \tag{11.6}$$

证明。 由

$$J_E R_E = R_E$$

以及互反角色保真逐式代入即得。证毕。

12. 零点保真与终端穷尽

事件级固定角色结论通过终端穷尽性扩展到完整目标零点域。

定义 12.1（零点保真的完成目标）

设完成解析对象为 F，其目标零点集合记为

$$Z_{\text{target}}(F). \tag{12.1}$$

终端读数族定义为

$$\mathcal{Z}_\Phi = \{\Phi_E(R_E) : E \in \mathfrak{E}\}. \tag{12.2}$$

若

$$\boxed{Z_{\text{target}}(F) = \mathcal{Z}_\Phi,} \tag{12.3}$$

则称完成目标具有终端穷尽性。

式 (12.3) 等价地表达为：

- 每个完整事件的 固定角色读数是目标零点；
- 每个目标零点都由某个完整事件的 固定角色读数给出。

定理 12.2（终端穷尽定理）

若每个 $E \in \mathfrak{E}$ 均满足定理 11.1，且目标完成对象满足终端穷尽性 (12.3)，则

$$\boxed{\forall \rho \in Z_{\text{target}}(F), \qquad \Re\rho = c.} \tag{12.4}$$

证明。 任取

$$\rho \in Z_{\text{target}}(F).$$

由 (12.3)，存在 $E \in \mathfrak{E}$，使

$$\rho = \Phi_E(R_E).$$

由定理 11.1，

$$\Re\rho = c.$$

由于 ρ 任意，结论成立。证毕。

13. 最小七条件闭合核

前述结构可压缩为七项。

K1. 根身份与互反角色系统

存在统一根身份 $\mathfrak{I}$，以及事件角色空间上的对合

$$J^2 = \mathrm{id}. \tag{13.1}$$

K2. 中心化互反表示

存在中心化表示

$$K_z$$

满足

$$\boxed{K_z(Jx) = K_{-z}(x).} \tag{13.2}$$

K3. 中心化参数精确传导

表示链中

$$\boxed{z_{j+1} \circ T_{j+1} = z_j.} \tag{13.3}$$

K4. 互反角色保真

表示迁移满足

$$\boxed{T_{j+1}J_j = J_{j+1}T_{j+1}.} \tag{13.4}$$

K5. 完整事件的生成源固定角色

对每个

$$E \in \mathfrak{E}$$

存在由生成源事件几何确定的

$$R_E$$

满足

$$\boxed{J_E R_E = R_E.} \tag{13.5}$$

K6. 零点保真的完成目标与终端穷尽

完整事件固定角色读数 s 恰好覆盖目标零点集合：

$$\boxed{Z_{\text{target}}(F) = \{\Phi_E(R_E) : E \in \mathfrak{E}\}.} \tag{13.6}$$

K7. 规范解析互反对合

终端零点角色上的互反作用为

$$\boxed{\iota_c(s) = 2c - \overline{s},} \tag{13.7}$$

且终端读数与 生成源互反角色等变：

$$\boxed{\Phi_E(J_E R) = \iota_c(\Phi_E(R)).} \tag{13.8}$$

由 K5 与 K7，

$$\Phi_E(R_E) \in \mathrm{Fix}(\iota_c).$$

再由 K6，

$$\boxed{\forall \rho \in Z_{\text{target}}(F), \qquad \Re\rho = c.} \tag{13.9}$$

K1–K4 提供事件与表示链的生成和保真结构；K5 提供生成源固定角色；K6 提供全局对象域覆盖；K7 把固定角色读到终端解析固定集。

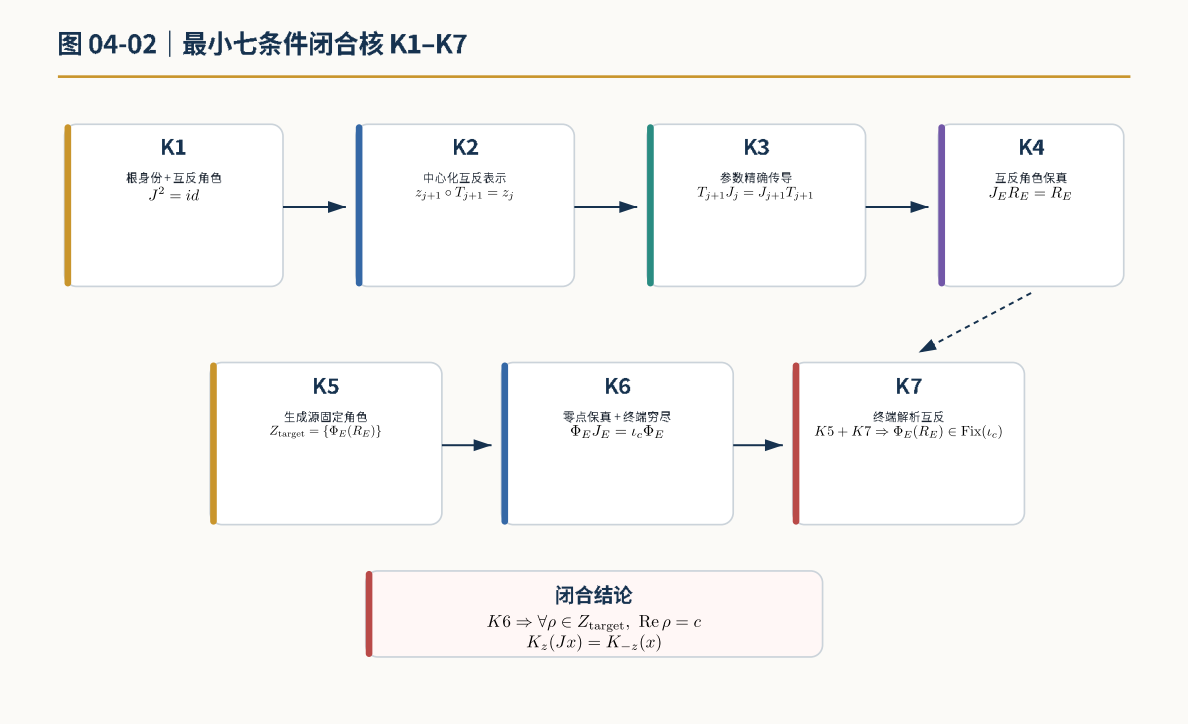


图 04-02　最小七条件闭合核。 K1–K4 负责根身份、中心化表示、参数与互反角色在表示链中的生成和保真；K5 提供完整事件的生成源固定角色；K6 给出零点保真的终端对象域穷尽；K7 把生成源互反作用读成终端解析对合。K5 与 K7 先把每个固定角色读入 $\mathrm{Fix}(\iota_c)$，再由 K6 把这一结论推广到全部目标零点。

14. Riemann 实现

本节把 K1–K7 对应到 Riemann 闭合链。

14.1 K1：自然数乘法与角色交换

根身份为

$$\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq. \tag{14.1}$$

关系表示为

$$\mathcal{R}_{\times} = \{(m,q,n) : mq = n\}. \tag{14.2}$$

互反角色交换为

$$\boxed{J(m,q,n) = (q,m,n).} \tag{14.3}$$

14.2 K2：中心化 Mellin 互反核

取

$$\boxed{K_z(m,q) = m^{-1/2-z} q^{-1/2+z}.} \tag{14.4}$$

则

$$K_z(q,m) = K_{-z}(m,q). \tag{14.5}$$

14.3 K3：中心化参数精确传导

同一个中心化参数沿

$$\text{Mellin} \to \text{壳层} \to \text{Dirichlet} \to \text{首部/尾部} \to \text{完成化} \to \text{终端读数} \tag{14.6}$$

保持不变。

14.4 K4：互反角色保真

乘法角色交换在中间解析表示中读作

$$z \leftrightarrow -z, \tag{14.7}$$

在终端完成解析表示中读作

$$\boxed{\rho \mapsto 1 - \overline{\rho}.} \tag{14.8}$$

各层表示保持同一事件中的互反角色归属。

14.5 K5：平方视界固定角色

由定理 8.2，

$$m > k, \quad q > k, \quad mq \le (k+1)^2$$

推出

$$\boxed{m = q = k+1.} \tag{14.9}$$

故平方视界端点为生成源固定角色。

14.6 K6：终端对象域

第一章引理 6.3A 已经把定理 5.5 的

$$\rho_{E,\pm}(\tau_R)$$

终端对象域识别为同一个右端固定角色 R_E 的读数。因此 K6 在 Riemann 实现中不是额外假设，而是由“对象域穷尽 + 终端角色同一化”推出：

$$\boxed{Z_{\mathrm{nt}}(\xi) = \{\Phi_E(R_E) : E \in \mathfrak{E}_{\mathrm{Riemann}}\}.} \tag{14.10}$$

这里不是为每个零点另造一个从生成源到终端的外部满射。定理 5.5 已经穷尽全部终端零点事件；引理 6.3A 只认出：终端事件原有的 $+/-$ 两个互反角色标签，在平方视界右端本来就是同一个固定角色。

14.7 K7：Riemann 解析互反对合

取

$$c = \frac{1}{2},$$

则

$$\boxed{\iota_{1/2}(\rho) = 1 - \overline{\rho}.} \tag{14.11}$$

由 K5 与 K7，

$$\begin{aligned} \rho_E &= \Phi_E(R_E) \\ &= \Phi_E(J_E R_E) \\ &= 1 - \overline{\Phi_E(R_E)} \\ &= 1 - \overline{\rho_E}. \end{aligned} \tag{14.12}$$

因此

$$\boxed{\Re \rho_E = \frac{1}{2}.} \tag{14.13}$$

再由 K6，

$$\boxed{\forall \rho \in Z_{\mathrm{nt}}(\xi), \qquad \Re \rho = \frac{1}{2}.} \tag{14.14}$$

这一实现中，生成源固定坐标的数值与终端解析坐标不作直接传递。传导对象是互反角色，而 $1/2$ 在终端层由解析固定点方程 (14.12) 读取。

15. 坐标类型纪律

参数化闭合核需要同时保持事件坐标与实际零点坐标的类型区分。

15.1 生成源相对角色坐标

定义

$$R = \log \frac{q}{m}. \tag{15.1}$$

互反交换满足

$$R \mapsto -R. \tag{15.2}$$

固定角色为

$$R = 0. \tag{15.3}$$

15.2 归一化生成源角色

归一化角色坐标满足

$$u \leftrightarrow 1 - u, \tag{15.4}$$

固定角色为

$$u = \frac{1}{2}. \tag{15.5}$$

15.3 有限视界事件提升坐标

事件中间表示的横向展开记为

$$\boxed{d_E(\tau).} \tag{15.6}$$

相应互反角色读数可写为

$$z_{E,\pm}(\tau) = \pm d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau). \tag{15.7}$$

15.4 实际零点横向位移

实际零点相对临界线的横向坐标记为

$$\boxed{d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2}.} \tag{15.8}$$

二者在对象类型上严格区分：

$$\boxed{d_E(\tau) \neq d_\rho \quad \text{作为对象类型.}} \tag{15.9}$$

终端固定角色读数给出

$$d_\rho = 0. \tag{15.10}$$

式 (15.10) 由终端解析固定点方程

$$\rho = 1 - \overline{\rho} \tag{15.11}$$

直接读取。

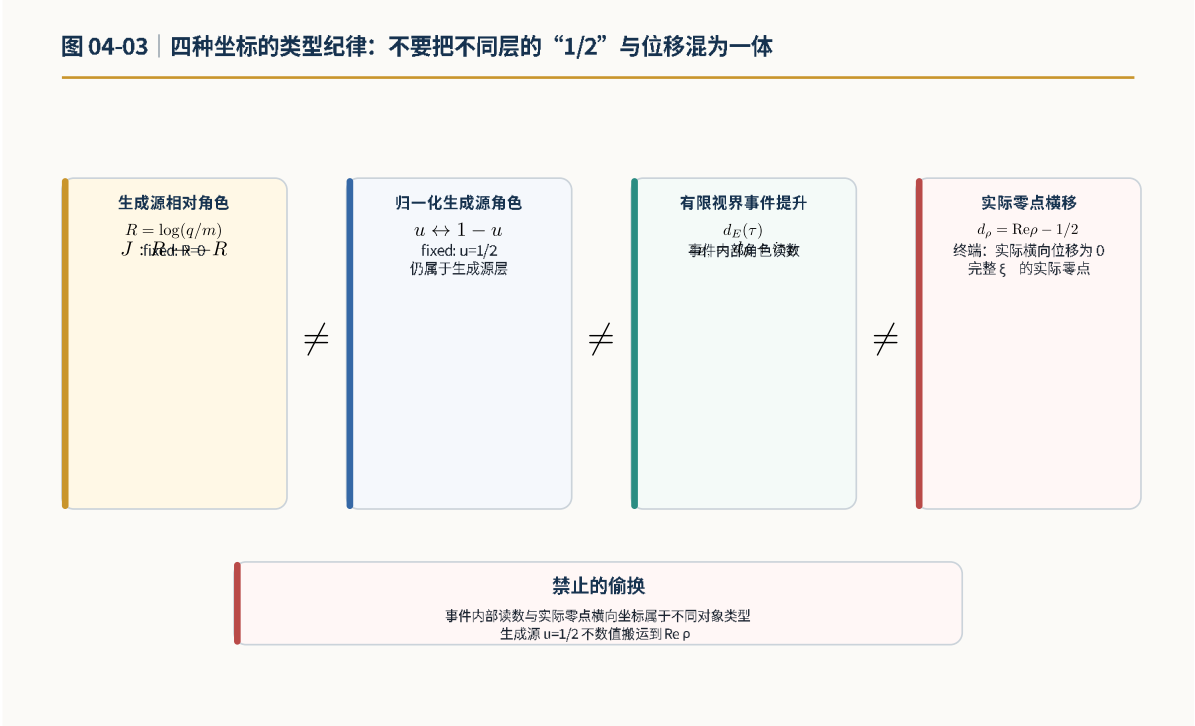


图 04-03　坐标类型纪律。 生成源相对角色坐标 R、归一化角色 u、有限视界事件提升 $d_E(\tau)$ 与实际零点横向位移 d_ρ 属于四种不同对象类型。特别地，$d_E(\tau) \neq d_\rho$；生成源中的 $u = 1/2$ 也不是被数值传导到 $\Re\rho$。终端的 $d_\rho = 0$ 来自解析固定点方程 $\rho = 1 - \overline{\rho}$。

16. 与第三章零点地址及解析重数的接口

参数化闭合核决定终端角色的解析地址位置。若

$$\rho \in Z_{\mathrm{nt}}^{\mathrm{dist}}(\xi)$$

且

$$\xi(s) = (s-\rho)^{m_\rho} U_\rho(s), \qquad U_\rho(\rho) \neq 0, \tag{16.1}$$

则：

$$\boxed{\rho = \text{终端零点地址},} \tag{16.2}$$

而

$$\boxed{m_\rho = \mathrm{ord}_\rho \xi = \text{解析重数}.} \tag{16.3}$$

K1–K7 的固定角色论证作用于地址读数 ρ，不把互反事件表示叶数与解析重数混合。因而

$$\boxed{\text{事件表示叶数} \neq \text{支撑地址计数} \neq \text{解析重数}.} \tag{16.4}$$

这使闭合核与零点除子

$$\mathcal{D}_\xi^{\mathrm{nt}} = \sum_\rho m_\rho [\rho] \tag{16.5}$$

保持兼容：固定角色定理决定支撑地址的横向位置；除子权重 m_ρ 仍作为独立解析数据保留。

17. 与第二章零点间隔几何的接口

第一章的终端固定角色读数给出

$$\rho_k = \frac{1}{2} + i\gamma_k. \tag{17.1}$$

于是闭合后的不同纵坐标

$$\gamma_k \tag{17.2}$$

形成实零点谱。相邻间隔

$$\Delta_k = \gamma_{k+1} - \gamma_k \tag{17.3}$$

属于零点间隔几何层。

因此在系列记号中：

$$\boxed{\begin{aligned} d_E(\tau) &: \text{有限视界事件提升横向坐标,} \\ d_\rho &: \text{实际零点横向位移,} \\ \Delta_k &: \text{相邻纵坐标间隔尺度.} \end{aligned}} \tag{17.4}$$

三者分别属于不同对象层，不复用同一符号。

18. 一般化定理与适用条件

K1–K7 给出同类闭合结构的一般适用条件。

定理 18.1（参数化固定角色一般化定理）

设一类目标系统具有：

1. 根身份 $\mathfrak{I}$；
2. 完整事件域 $\mathfrak{E}$；
3. 每个事件的互反角色对合 J_E；
4. 中心化互反表示；
5. 中心化参数精确传导；
6. 互反角色保真；
7. 生成源几何确定的固定角色 R_E；
8. 终端解析对合

$$\iota_c(s) = 2c - \overline{s};$$

9. 零点保真的终端穷尽性

$$Z_{\text{target}} = \{\Phi_E(R_E) : E \in \mathfrak{E}\}.$$

则

$$\boxed{Z_{\text{target}} \subset \{s : \Re s = c\}.} \tag{18.1}$$

证明。 对任意 E，由

$$J_E R_E = R_E$$

及

$$\Phi_E(J_E R) = \iota_c(\Phi_E(R))$$

得

$$\Phi_E(R_E) = \iota_c(\Phi_E(R_E)).$$

故

$$\Re\Phi_E(R_E) = c.$$

由终端穷尽性，任意

$$\rho \in Z_{\text{target}}$$

均为某个 $\Phi_E(R_E)$，故

$$\Re\rho = c.$$

证毕。

18.2 一般适用条件表

对任意满足该结构的目标系统，各条件按下表核验：

层级	验证对象	数学条件
K1	根身份与角色空间	$J^2 = \mathrm{id}$
K2	中心化表示	$K_z(Jx) = K_{-z}(x)$
K3	参数链	$z_{j+1}T_{j+1} = z_j$
K4	角色链	$T_{j+1}J_j = J_{j+1}T_{j+1}$
K5	完整事件几何	$J_E R_E = R_E$
K6	完成目标	$Z_{\text{target}} = \{\Phi_E(R_E)\}$
K7	终端解析对合	$\iota_c(s) = 2c - \bar{s}$，且 $\Phi_E J_E = \iota_c \Phi_E$

K1–K7 在同一事件履历上同时成立时，定理 18.1 适用。

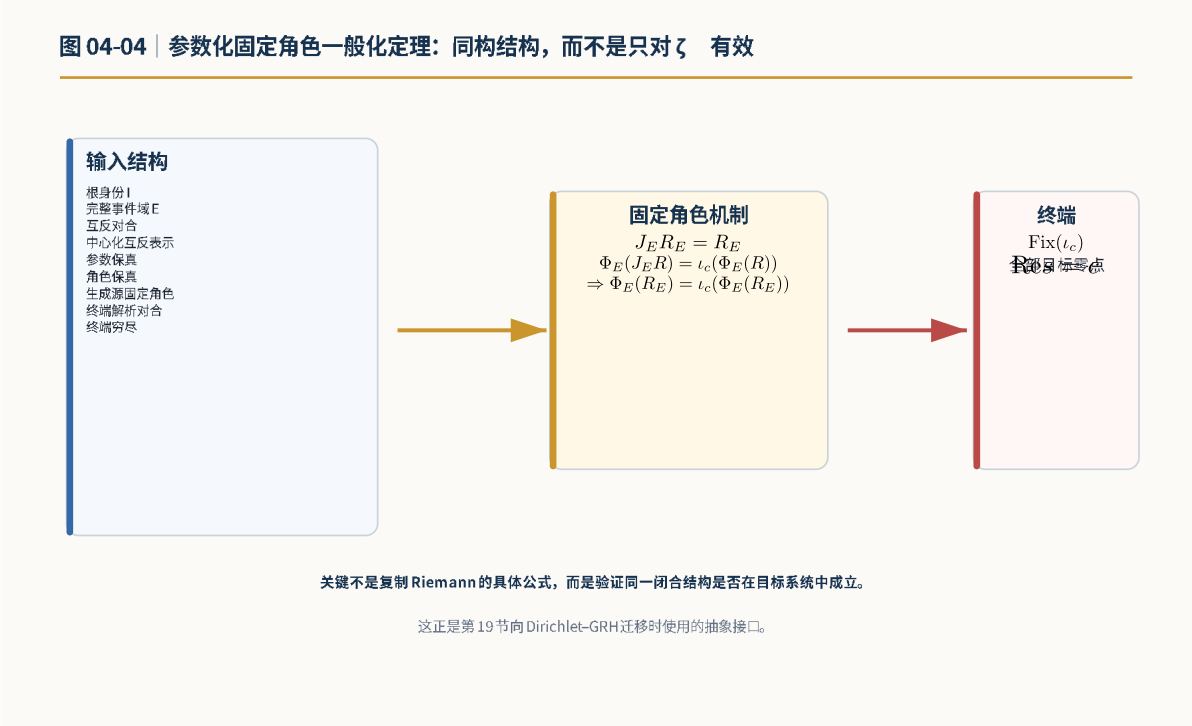


图 04-04　参数化固定角色一般化定理。 定理 18.1 把第一章的具体 Riemann 闭合压缩为可迁移结构：根身份、完整事件、互反作用、中心化表示、参数与角色保真、生成源固定角色、终端解析对合以及终端穷尽。只要目标系统逐项满足这些条件，固定角色就被终端读入 $\Re s = c$。

19. Dirichlet–GRH 的最小迁移问题

本节开始把第 18 节的一般闭合核应用于 Dirichlet L-函数。

本章所称广义黎曼猜想（GRH）均指 **Dirichlet–GRH**：

$$\boxed{L(\rho,\chi)=0,\qquad 0<\Re\rho<1\Rightarrow \Re\rho=\frac{1}{2}} \tag{19.1}$$

对任意 Dirichlet character χ 成立。

这里首先固定逻辑边界：

$$\boxed{\mathrm{RH}\not\Rightarrow \text{Dirichlet-GRH}} \tag{19.2}$$

作为一个裸逻辑命题，这是显然的：不同 $L(s,\chi)$ 具有不同系数与不同完成因子。

本章采用的迁移形式是：

$$\boxed{\text{第一章的 Riemann 固定角色闭合} + \text{Dirichlet 身份保持认证} \Rightarrow \text{Dirichlet–GRH.}} \tag{19.3}$$

新增任务因此不是重新证明第一章的平方视界，也不是重新构造一套终端闭合，而是认证：

> 特征加权没有更换根乘法身份。
>
> (19.4)

19.1 根身份与 特征通道

全书唯一根乘法身份仍为

$$\boxed{\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq.} \tag{19.5}$$

Dirichlet character 不改变乘法律 μ，也不改变关系

$$mq = n.$$

它只给同一个乘法关系增加通道权重。

为避免把复杂 character χ 与其共轭 $\overline{\chi}$ 错写成两个母身份，定义其**互反 特征包**

$$\boxed{\mathfrak{P}_{\chi} := \{\chi, \overline{\chi}\}.} \tag{19.6}$$

$\mathfrak{P}_{\chi}$ 是一个无序通道包：

$$\mathfrak{P}_{\chi} = \mathfrak{P}_{\overline{\chi}}.$$

因此

$$\chi \leftrightarrow \overline{\chi}$$

只改变互反取向，不改变通道包身份。

这正是复杂 character 情形所需要的身份层级：固定的是

$$\boxed{\mathfrak{I}_{\times} \quad 与 \quad \mathfrak{P}_{\chi},}$$

而不是要求

$$\chi = \overline{\chi}.$$

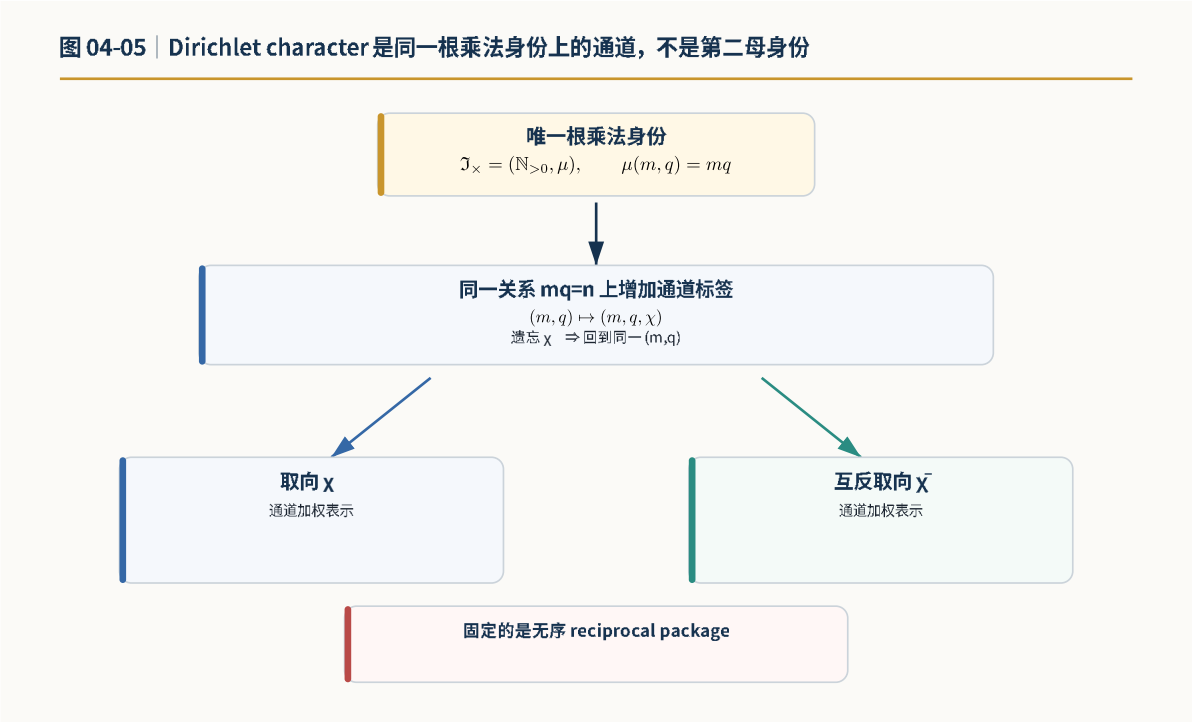


图 04-05　根身份与 character 通道。 Dirichlet character 并不改变乘法律 $\mu(m,q) = mq$，而只在同一关系 $mq = n$ 上增加通道权重。对复杂 character，χ 与 $\overline{\chi}$ 是同一无序 reciprocal package $\mathfrak{P}_{\chi} = \{\chi, \overline{\chi}\}$ 的两个取向；遗忘通道标签后仍返回第一章唯一的根乘法身份。

19.2 最小迁移判据：只认证一个身份

第一章的固定角色闭合已经在母乘法身份

$$\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu)$$

上完成。Dirichlet 情形不重新建立一套“零点到固定角色”的证明，而只认证 character 加权后的全部表示仍属于同一个根身份。

定义 19.1（身份保持的通道提升）

设一个新增通道表示建立在同一根关系

$$mq = n$$

之上。若满足：

1. **根身份保持**

$$\pi_{\chi}: (m, q, \chi) \mapsto (m, q)$$

遗忘通道标签以后仍回到同一个

$$\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu);$$

2. **互反身份保持** character 只以无序互反包

$$\mathfrak{P}_{\chi} = \{\chi, \overline{\chi}\}$$

的两个取向出现，并且

$$(m, q, \chi) \leftrightarrow (q, m, \overline{\chi})$$

与母身份的角色交换相容；

3. **表示履历保持** 局部核、乘法壳层、全局 Dirichlet 编码、moving head/tail 与 completion 都使用同一个中心化参数 z，改变的是通道权重与完成因子，不产生第二个生成身份；
4. **完成表示仍属于同一通道身份** $\Lambda(s, \chi)$ 是该通道身份的完成解析表示；其零点地址属于这一通道身份的终端读法，函数方程与共轭结构把同一互反取向读成

$$\rho \mapsto 1 - \overline{\rho}.$$

则称该 Dirichlet 表示是根乘法身份的**身份保持通道提升**。

四项不是四个新的闭合机制，而是同一个命题在四个表示层的核验：

加入 character 以后，根身份仍然只有一个。

(19.7)

定理 19.2（母身份闭合继承定理）

设第一章的母乘法身份已经完成固定角色闭合。若 Dirichlet 通道是定义 19.1 的身份保持通道提升，则第一章的固定角色覆盖与终端闭合在该通道中原样继承；无需为 Dirichlet L-函数重新构造第二套固定角色或第二套终端读数机制。

特别地，该通道的每个完整事件仍在同一个平方视界右端取得

$$m = q,$$

而 $+/-$ 两个互反角色标签在角色层识别为同一个固定角色。character 只把互反取向扩展为

$$\chi \leftrightarrow \overline{\chi},$$

不改变固定角色本身。

因此，只要第 20–22 节认证 Dirichlet 通道确实保持同一身份，母闭合结论即在该通道中成立：

$$\boxed{L(\rho,\chi) = 0, \quad 0 < \Re\rho < 1 \Rightarrow \Re\rho = \frac{1}{2}.} \tag{19.8}$$

证明

第一章的终端固定角色覆盖由三件身份级事实组成：

$$\boxed{\text{事件对象域完整} + \text{平方视界右端固定角色} + \text{换表示不换角色归属.}}$$

对 Dirichlet 通道，π_χ 遗忘 character 标签后仍回到同一个关系

$$mq = n.$$

所以事件区间与平方视界分解不变。特别地，

$$m > k, \qquad q > k, \qquad mq \le (k+1)^2 \Rightarrow m = q = k+1$$

完全不含 χ，因此母身份的固定角色原样保留。

互反方面，character 只把

$$(m,q) \leftrightarrow (q,m)$$

提升为

$$(m,q,\chi) \leftrightarrow (q,m,\overline{\chi}),$$

而无序包

$$\mathfrak{P}_\chi = \{\chi, \overline{\chi}\}$$

保持不变。因此这只是同一身份内部的通道取向交换，不产生第二身份。

第 20–22 节进一步证明同一个 z 进入加权中心核、乘法壳层、全局 L-编码、head/tail 与 completion；完成函数的函数方程与共轭结构又把同一互反作用在终端解析层读成

$$\rho \mapsto 1-\overline{\rho}.$$

于是第一章引理 6.3A 的终端角色同一化在通道提升下保持：终端 $+/-$ 标签仍只是同一个固定角色的两个互反取向，而不是两个新的身份。母身份已经证明的固定角色闭合因此直接继承到该通道。

所以 Dirichlet–GRH 的新增数学责任只有一项：

> Dirichlet character 是否仍处在同一个根乘法身份闭包中。

第 20–22 节正是对此的逐层认证。证毕。

20. Dirichlet 特征加权中心化表示

设 χ 为 Dirichlet character。

定义 特征加权中心核：

$$\boxed{W_{\chi,z}(m,q)=\chi(m)\overline{\chi(q)}m^{-1/2-z}q^{-1/2+z}.} \tag{20.1}$$

这里改变的是通道权重；底层乘法关系仍然是

$$mq=n.$$

20.1 加权互反交换

命题 20.1

有

$$\boxed{W_{\chi,z}(q,m)=W_{\overline{\chi},-z}(m,q).} \tag{20.2}$$

证明

直接计算：

$$\begin{aligned} W_{\chi,z}(q,m) &= \chi(q)\overline{\chi(m)}q^{-1/2-z}m^{-1/2+z} \\ &= \overline{\chi(m)}\chi(q)m^{-1/2+z}q^{-1/2-z} \\ &= W_{\overline{\chi},-z}(m,q). \end{aligned}$$

证毕。

因此 Riemann 情形的

$$(m,q,z)\leftrightarrow(q,m,-z)$$

在 特征通道提升 中成为

$$\boxed{(m,q,\chi,z)\leftrightarrow(q,m,\overline{\chi},-z).} \tag{20.3}$$

这不是新身份，而是同一

$$\mathfrak{P}_\chi=\{\chi,\overline{\chi}\}$$

内部的互反取向交换。

20.2 加权乘法壳层与全局 L-编码

定义

$$a_{n,\chi}(z)=\sum_{mq=n}\chi(m)\overline{\chi(q)}m^{-1/2-z}q^{-1/2+z}. \tag{20.4}$$

由命题 20.1，

$$\boxed{a_{n,\chi}(z)=a_{n,\overline{\chi}}(-z).} \tag{20.5}$$

在绝对收敛域内，

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}a_{n,\chi}(z)n^{-\alpha}&=\sum_{m,q\geq 1}\chi(m)\overline{\chi(q)}m^{-\alpha-1/2-z}q^{-\alpha-1/2+z}\\&=L\left(\alpha+\frac{1}{2}+z,\chi\right)L\left(\alpha+\frac{1}{2}-z,\overline{\chi}\right).\end{aligned}$$

故

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}a_{n,\chi}(z)n^{-\alpha}=L(w_+,\chi)L(w_-,\overline{\chi}),} \tag{20.6}$$

其中

$$\boxed{w_\pm=\alpha+\frac{1}{2}\pm z.} \tag{20.7}$$

于是

$$\boxed{z=\frac{w_+-w_-}{2}.} \tag{20.8}$$

特征加权 没有引入任何新的

$$z\mapsto\tilde{z}.$$

K3 因而保持。

20.3 移动 head/tail 不改变解析点

定义

$$H_{\chi,r}(w)=\sum_{n\leq r}\chi(n)n^{-w}, \tag{20.9}$$

$$T_{\chi,r}(w)=L(w,\chi)-H_{\chi,r}(w). \tag{20.10}$$

则精确有

$$\boxed{H_{\chi,r}(w)+T_{\chi,r}(w)=L(w,\chi).} \tag{20.11}$$

并且

$$H_{\chi,r+1}(w)-H_{\chi,r}(w)=\chi(r+1)(r+1)^{-w}, \tag{20.12}$$

$$T_{\chi,r+1}(w)-T_{\chi,r}(w)=-\chi(r+1)(r+1)^{-w}. \tag{20.13}$$

因此

$$\boxed{\Delta_r\left(H_\chi + T_\chi\right) = 0.} \tag{20.14}$$

移动视界改变的是同一解析点 w 在 head 与 tail 之间的分配，不改变 w，也不改变 z。

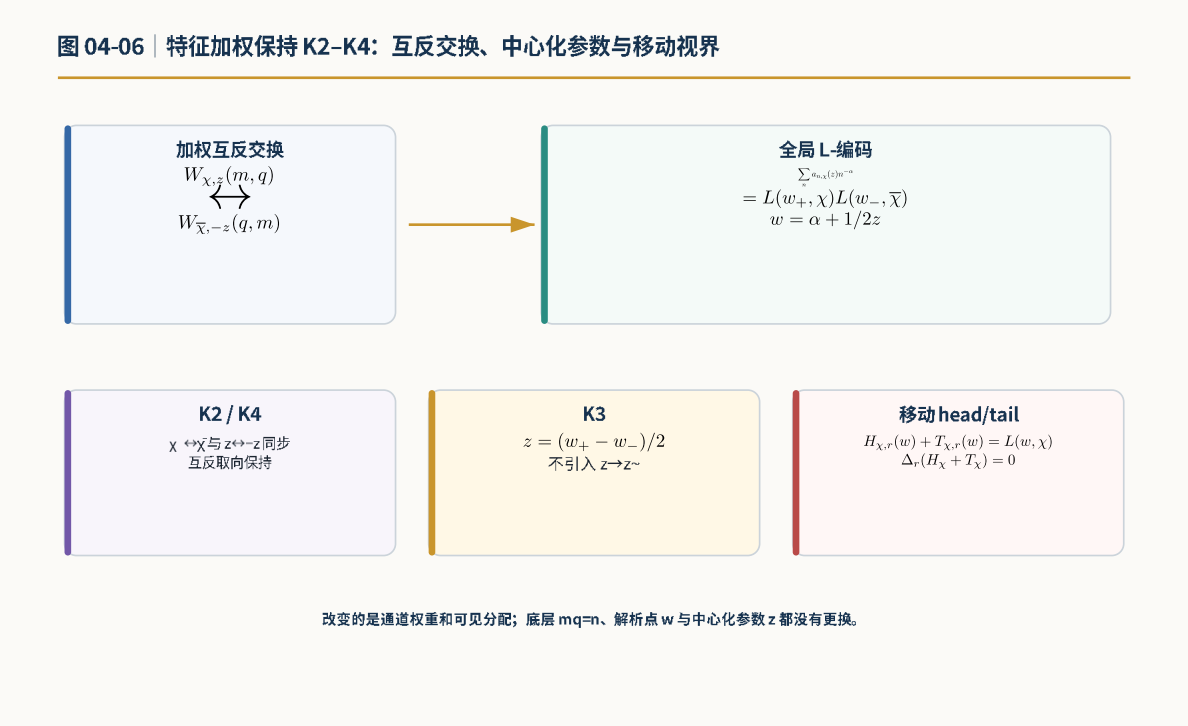


图 04-06　特征加权后的表示保真。 加权核满足 $W_{\chi,z}(q,m) = W_{\overline{\chi},-z}(m,q)$，全局壳层仍编码为 $L(w_+,\chi)L(w_-,\overline{\chi})$，其中 $z = (w_+ - w_-)/2$ 没有被替换；移动 head/tail 也严格保持 $H_{\chi,r}(w) + T_{\chi,r}(w) = L(w,\chi)$。因此通道提升保持 K2–K4，而不是重新定义一套解析坐标。

21. 本原特征完成化与同一通道的终端互反

设 χ 为 本原 Dirichlet 特征，conductor 为 q_χ，并令

$$\chi(-1) = (-1)^{a_\chi}, \qquad a_\chi \in \{0,1\}.$$

标准完成函数为

$$\boxed{\Lambda(s,\chi) = \left(\frac{q_\chi}{\pi}\right)^{(s+a_\chi)/2} \Gamma\left(\frac{s+a_\chi}{2}\right) L(s,\chi).} \tag{21.1}$$

其函数方程为

$$\boxed{\Lambda(s,\chi) = \varepsilon_\chi \Lambda(1-s,\overline{\chi}), \qquad |\varepsilon_\chi| = 1.} \tag{21.2}$$

完成化 只作用在同一个 argument s 上，因此中心化参数

$$z = s - \frac{1}{2}$$

没有更换。

21.1 共轭结构与同一 χ-零点集的临界线反射

Dirichlet 系数的共轭关系给出

$$\boxed{\overline{\Lambda(\overline{s},\chi)} = \Lambda(s,\overline{\chi}).} \tag{21.3}$$

若

$$\Lambda(\rho,\chi) = 0,$$

由函数方程得

$$\Lambda(1-\rho,\overline{\chi}) = 0.$$

再取共轭，并使用 (21.3)，得到

$$\boxed{\Lambda(1-\overline{\rho},\chi) = 0.} \tag{21.4}$$

因此，对每一个固定 primitive χ，其非平凡零点集自身带终端互反对合

$$\boxed{\iota_{1/2}(\rho) = 1-\overline{\rho}.} \tag{21.5}$$

这与第一章的 Riemann 终端对合完全同型。

21.2 完成化 的零点保真

在开放临界带

$$0 < \Re s < 1$$

中，

$$\left(\frac{q_\chi}{\pi}\right)^{(s+a_\chi)/2}$$

无零点，

$$\Gamma\left(\frac{s+a_\chi}{2}\right)$$

也无零点。

因此在该区域，

$$\boxed{L(\rho,\chi) = 0 \Leftrightarrow \Lambda(\rho,\chi) = 0.} \tag{21.6}$$

故 完成化 没有另造一套非平凡零点身份。

K6 与 K7 因而保持。

21.3 复杂 character 的固定对象不是单个取向，而是互反包

当 $\chi \neq \overline{\chi}$ 时，不要求单个 character 标签成为固定点。

固定的是无序互反包

$$\mathfrak{P}_\chi = \{\chi,\overline{\chi}\}.$$

在生成源固定角色

$$m = q$$

处，特征取向发生

$$(m, m, \chi) \leftrightarrow (m, m, \overline{\chi}),$$

但无序互反包

$$\mathfrak{P}_\chi = \{\chi, \overline{\chi}\}$$

保持不变。这里不把生成源固定角色与中心化解析参数 z 混为同一坐标；$m = q$ 属于生成源角色层，z 属于解析表示层。

因此在互反包的身份商中，

$$\boxed{[(m, m, \chi)]_{\mathrm{rec}} = [(m, m, \overline{\chi})]_{\mathrm{rec}}.} \tag{21.7}$$

这正是复杂特征情形下 K5 的正确读取。

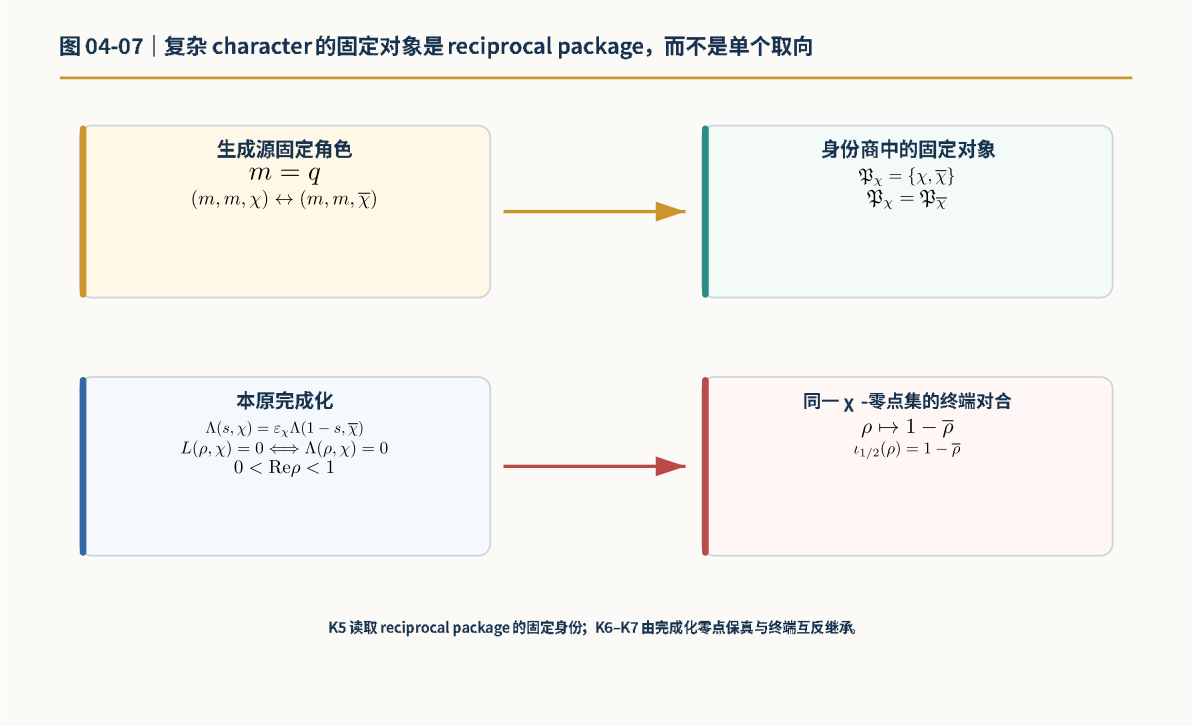


图 04-07　复杂 character 的固定对象。 当 $\chi \neq \overline{\chi}$ 时，生成源固定角色 $m = q$ 并不要求单个 character 标签成为固定点；固定的是无序 reciprocal package $\mathfrak{P}_\chi = \{\chi, \overline{\chi}\}$。本原完成化保持同一中心化参数与开放临界带零点身份，同时给出同一 χ-零点集的终端对合 $\rho \mapsto 1 - \overline{\rho}$，从而保持 K5–K7 所需结构。

22. 本原 Dirichlet–GRH

定理 22.1（本原 Dirichlet 身份迁移）

对任意 本原 Dirichlet 特征 χ，特征加权 表示是第一章根乘法身份的身份保持通道提升。

证明

逐项核验定义 19.1：

第一，根身份保持。

所有加权项仍建立在

$$mq = n$$

上。遗忘 χ-权重以后，底层关系正是第一章的

$$\mathcal{R}_{\times} = \mathrm{Graph}(\mu).$$

第二，互反通道保持。

由命题 20.1，

$$(m, q, \chi, z) \leftrightarrow (q, m, \overline{\chi}, -z),$$

而

$$\mathfrak{P}_{\chi} = \mathfrak{P}_{\overline{\chi}}.$$

因此 reciprocal exchange 没有离开同一 特征包。

第三，中心化参数保持。

由 (20.6)–(20.8)，全局 L-编码仍使用同一个 z；由 (20.11)–(20.14)，moving head/tail 也不改变解析点；由 (21.1)，完成化 仍在同一个 $s = \frac{1}{2} + z$ 上作用。

第四，终端归属保持。

由 (21.6)，开放临界带中的 L-零点与 Λ-零点一致；由 (21.5)，终端零点集的解析互反仍为

$$\rho \mapsto 1 - \overline{\rho}.$$

因此定义 19.1 全部成立。证毕。

定理 22.2（本原 Dirichlet–GRH）

对任意 本原 Dirichlet 特征 χ，若

$$L(\rho, \chi) = 0, \qquad 0 < \Re\rho < 1,$$

则

$$\boxed{\Re\rho = \frac{1}{2}.} \tag{22.1}$$

证明

由定理 22.1，primitive Dirichlet 通道 是根乘法身份的身份保持通道提升。

由定理 19.2：

- K1 的根身份部分由同一根乘法身份继承，互反特征取向由第 20 节认证；

- K5 由同一平方视界固定角色继承；
- K2–K4 由第 20 节的加权互反与参数保真给出；
- K6–K7 由第 21 节的 完成化 零点保真与终端互反给出。

故 K1–K7 对该 本原通道 全部成立。

于是定理 18.1 适用，且

$$c = \frac{1}{2}.$$

因此任意开放临界带非平凡零点都满足

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

证毕。

23. 非本原特征与有限 Euler 因子

设模 q 的 Dirichlet character χ 由 conductor $f \mid q$ 的 本原 Dirichlet 特征 χ^* 诱导。

则

$$\boxed{L(s,\chi) = L(s,\chi^*)\prod_{\substack{p\mid q\\ p\nmid f}}(1-\chi^*(p)p^{-s}).} \tag{23.1}$$

若某个附加 Euler factor 为零：

$$1-\chi^*(p)p^{-s} = 0,$$

则

$$p^{-s} = \chi^*(p)^{-1}.$$

由于

$$|\chi^*(p)| = 1,$$

取绝对值得

$$p^{-\Re s} = 1.$$

故

$$\boxed{\Re s = 0.} \tag{23.2}$$

因此这些有限 Euler factors 在开放临界带

$$0 < \Re s < 1$$

中不增加零点。

所以 imprimitive $L(s,\chi)$ 在开放临界带中的非平凡零点全部来自 primitive ancestor

$$L(s,\chi^*).$$

由定理 22.2，

$$\boxed{\Re\rho=\frac{1}{2}.} \tag{23.3}$$

24. 主特征与 Riemann 通道

对模 q 的 主特征 χ_0，

$$\boxed{L(s,\chi_0)=\zeta(s)\prod_{p\mid q}(1-p^{-s}).} \tag{24.1}$$

若

$$1-p^{-s}=0,$$

则同样有

$$\Re s=0.$$

故开放临界带中的非平凡零点全部来自 $\zeta(s)$。

第一章已经给出

$$\boxed{\zeta(\rho)=0,\qquad 0<\Re\rho<1\Rightarrow\Re\rho=\frac{1}{2}.} \tag{24.2}$$

因此 主特征 情形也满足同一结论。

25. Dirichlet–GRH 主定理与“一个身份”的含义

定理 25.1（Dirichlet–GRH）

对任意 Dirichlet character χ，若

$$L(\rho,\chi)=0,\qquad 0<\Re\rho<1,$$

则

$$\boxed{\Re\rho=\frac{1}{2}.} \tag{25.1}$$

证明

分三类。

1. primitive non 主特征：由定理 22.2。
2. im 本原 Dirichlet 特征：由第 23 节归约到 primitive ancestor。
3. 主特征：由第 24 节归约到第一章的 Riemann 情形。

故结论对全部 Dirichlet characters 成立。证毕。

25.1 最小迁移链

整个 Dirichlet–GRH 证明可以压缩为：

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu) \\
&\Downarrow \\
&\text{同一} mq = n \text{上增加 特征通道} \\
&\Downarrow \\
&\mathfrak{P}_{\chi} = \{\chi, \overline{\chi}\} \quad \text{保持互反包身份} \\
&\Downarrow \\
&W_{\chi,z}(m,q) \leftrightarrow W_{\overline{\chi},-z}(q,m) \\
&\Downarrow \\
&z \text{在} L\text{-编码、head/tail、完成化 中保持不变} \\
&\Downarrow \\
&\rho \mapsto 1 - \overline{\rho} \\
&\Downarrow \\
&\text{K1–K7 对 Dirichlet 通道 成立} \\
&\Downarrow \\
&\boxed{\Re\rho = \frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{25.2}
$$

因此 GRH 的新增数学内容不是重新建立一套固定角色闭合，而是认证：

character 只增加通道，不增加第二个根身份。

(25.3)

图 04-08 | Dirichlet–GRH 的最小迁移链：只新增身份保持认证



图 04-08　Dirichlet–GRH 的最小迁移链。 第一章已经完成母乘法身份上的固定角色闭合；Dirichlet 情形新增的核心任务仅是认证 character-weighted channel lift 保持同一根身份。primitive 通道直接继承 K1 – K7；imprimitive 通道的有限 Euler 因子在开放临界带不新增零点；principal character 则归约到 Riemann 通道。三类共同给出定理 25.1。

25.2 Cyclotomic / Artin 视角的身份一致性

这一节不是定理 25.1 的额外证明前提，只提供标准结构上的一致性说明。

令

$$K_m = \mathbb{Q}(\zeta_m),$$

则

$$\mathrm{Gal}(K_m/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times. \tag{25.4}$$

该 Galois 群为 Abelian，因而其不可约复表示均为一维 characters。通过 Abelian Artin–Dirichlet 对应，Dedekind zeta 的 Artin 因子正是相应的 Dirichlet L-通道 s（其 conductor 由具体 character 决定）。

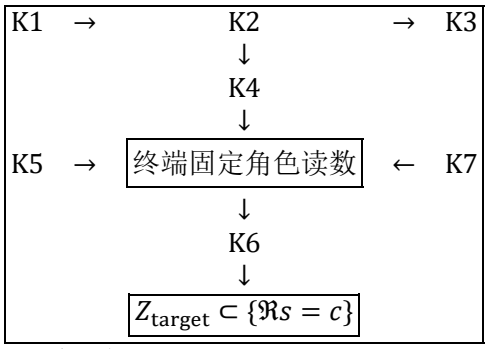
所以 cyclotomic total object 也给出同一个结构判断：

> Dirichlet characters 是总乘法对象的内部表示通道，不是彼此独立的根乘法身份。
>
> (25.5)

这与第 19–24 节由加权乘法表示直接得到的身份判断一致。

26. 逻辑依赖的最小化

闭合核的依赖关系可写为：



(26.1)

其中局部闭合的核心关系仍为：

$$\boxed{J_E R_E = R_E} \tag{26.2}$$

与

$$\boxed{\Phi_E J_E = \iota_c \Phi_E.} \tag{26.3}$$

二者直接推出

$$\boxed{\Phi_E(R_E) \in \mathrm{Fix}(\iota_c).} \tag{26.4}$$

因此参数化后的闭合核以 (26.4) 作为 terminal closure 的精确定义；其逻辑输入完全由生成源固定角色与 互反角色保真给出。

27. 结论

Riemann 闭合核可以压缩为三个连续层次。

第一层是**生成与表示**：

$$\mathfrak{I}_{\times} \to \text{互反关系} \to \text{中心化表示}.$$

第二层是**双重保真**：

$$\boxed{\text{中心化参数保真} + \text{互反角色保真}.}$$

第三层是**固定角色与终端读数**：

$$\boxed{J_E R_E = R_E}$$

经过

$$\boxed{\Phi_E J_E = \iota_c \Phi_E}$$

得到

$$\boxed{\Phi_E(R_E) = \iota_c(\Phi_E(R_E)).}$$

因此，

$$\boxed{\Re\Phi_E(R_E) = c.}$$

终端穷尽把这一事件级结论提升为全局目标零点结论：

$$\boxed{\forall \rho \in Z_{\text{target}}, \qquad \Re\rho = c.}$$

在 Riemann 实现中，

$$c = \frac{1}{2}, \qquad \iota_{1/2}(\rho) = 1 - \overline{\rho},$$

故

$$\boxed{\rho = 1 - \overline{\rho} \Leftrightarrow \Re\rho = \frac{1}{2}.}$$

Dirichlet–GRH 给出了本章一般迁移定理的第一个完整应用。其关键并非重新证明一遍 Riemann 事件几何，而是证明 特征加权只是同一根乘法身份的内部通道提升。于是

$$\boxed{\text{RH 闭合核} + \text{Dirichlet 身份保持认证} \Rightarrow \text{Dirichlet–GRH}.}$$

在这一应用中，真正保持不变的是：

$$\boxed{\mathfrak{I}_{\times}, \qquad \mathfrak{P}_{\chi}, \qquad z, \qquad \text{互反角色归属}, \qquad \iota_{1/2}.}$$

因此“从 RH 迁移到 GRH”的最小数学内容可以压缩成一句话：

同一个根身份进入新的 特征通道，但没有变成新的根身份。

整个参数化结构可写为：

同一根身份 → 同一事件的多层表示 →
中心化参数精确传导 → 互反角色保真 → 生成源固定角色 →
终端固定角色读数 → 全局终端穷尽.

其中保持的是同一事件中的角色归属；生成源归一化固定读数与终端解析实坐标属于不同坐标类型，最终解析实坐标由终端互反对合的固定集给出。

第五章　黎曼猜想闭合后的保真事件谱图

实际零点读数、有限视界事件提升与谱路线的分层结构

摘要

第一章（H01）的闭合结论给出非平凡零点的实际横向读数

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

写中心化零点坐标为

$$a_\rho = \rho - \frac{1}{2} = d_\rho + i\gamma_\rho, \qquad d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2},$$

则闭合读数等价于

$$d_\rho = 0.$$

这一结论只固定实际零点的横向坐标。零点纵坐标 γ_n、解析重数 m_n、乘法总对数尺度

$$L_\times = \log(mq)$$

以及相对角色坐标

$$R = \log(q/m)$$

仍属于不同层级的数据。

有限视界事件内部另有独立的事件提升坐标

$$d_E(\tau),$$

其两叶表示为

$$z_{E,\pm}(\tau) = \pm d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau).$$

必须保持

$$\boxed{d_E(\tau) \neq d_\rho \quad \text{作为对象类型。}}$$

前者记录有限视界互反事件的展开与闭合；后者是实际零点相对临界线的横向位移。

最小局部事件载体写成

$$\chi_E(z,\tau) = (z - i\gamma_E(\tau))^2 - d_E(\tau)^2.$$

当 $d_E = 0$ 时出现的二重根表示两张互反事件叶在闭合截面黏合，不等于 ξ 零点的解析重数。实际闭合零点同时保留不同地址支撑

$$\Gamma_+ = \{\gamma_n\}$$

与正高度零点除子

$$\mathcal{D}_{\xi}^{+}=\sum_{n\geq 1} m_n\,[\rho_n],\qquad \rho_n=\frac{1}{2}+i\gamma_n.$$

在这一分层下，Hilbert–Pólya、Berry–Keating、随机矩阵、Weil 正性、de Branges / canonical systems、Connes scaling / spectral triples、有限 Weil 谱收敛以及几何/上同调路线可以放入同一坐标账本中比较。它们分别读取

$$(L_{\times},R,d_{\rho},\gamma)$$

以及事件提升坐标 $d_E(\tau)$ 的不同投影。

本章由此建立闭合后的第一张保真谱图：它区分实际零点谱、事件提升谱、乘法生成坐标与后续算子谱，并为第六章的任毅飞算子、第七章的谱见证、第八章的 GUE 二阶自身关系以及第九章的独立源生成（source-generated） Hilbert–Pólya 路线提供统一坐标接口。

0. 本章的逻辑位置：闭合后的谱图层

第一章（H01）给出实际非平凡零点的闭合读数：

$$\boxed{\rho_n=\frac{1}{2}+i\gamma_n.} \tag{0.1}$$

本章从这一闭合零点对象出发，构造其最小保真谱图：

$$\boxed{\text{RH 闭合}\ \Rightarrow\ \text{保真谱图}\ \Rightarrow\ \text{谱路线分层.}} \tag{0.2}$$

这里的“谱图”指对零点支撑、解析重数、事件提升与乘法生成坐标进行分层记录的谱载体。第六章起进入 Hilbert 空间上的算子谱，因此本章固定算子构造以前的共同坐标接口。

本章在全书中的位置为：

$$\boxed{\text{H01 闭合} \to \text{H05 保真谱图} \to \text{H06 规范算子} \to \text{H07 谱见证} \to \text{H08 GUE 二阶关系,}} \tag{0.3}$$

而第九章从乘法生成源独立构造源生成（source-generated） Hilbert–Pólya 谱路线。

1. RH 闭合固定的零点坐标

设

$$\rho=\beta+i\gamma$$

为非平凡零点。标准互反—共轭对称把

$$\rho$$

送到

$$1-\overline{\rho}.$$

引入中心化坐标

$$a_\rho = \rho - \frac{1}{2}.$$

写成

$$\boxed{a_\rho = \rho - \frac{1}{2} = d_\rho + i\gamma_\rho, \qquad d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2}, \qquad \gamma_\rho = \Im\rho.} \tag{1.1}$$

则中心化互反对合为

$$\boxed{\iota(a) = -\overline{a}.} \tag{1.2}$$

所以

$$d_\rho + i\gamma_\rho \mapsto -d_\rho + i\gamma_\rho.$$

其固定集为

$$a = -\overline{a} \quad \Leftrightarrow \quad \Re a = 0,$$

亦即

$$\boxed{\mathrm{Fix}(\iota) = i\mathbb{R}} \tag{1.3}$$

以及

$$\boxed{\Re s = \frac{1}{2}.} \tag{1.4}$$

从这个坐标看，RH 的内容可以压成一句话：

$$\boxed{\text{完整 Riemann 零点读数的横向位移} d_\rho \text{为 0.}} \tag{1.5}$$

RH 的闭合条件作用于实际零点的横向坐标：

$$d_\rho = 0.$$

纵向坐标 γ_ρ、解析重数 m_n 与素数幂生成源位置 $k\log p$ 保持各自的数据类型。

因此 RH 闭合以后，需要区分至少两级数据。

正高度不同地址支撑为

$$\boxed{\Gamma_+ = \{\gamma_n\}.} \tag{1.6}$$

带解析重数的正高度除子数据为

$$\boxed{\mathcal{D}_\xi^+ = \sum_{n\geq 1} m_n\,[\rho_n].} \tag{1.7}$$

对应的中心化闭合支撑可写成

$$\boxed{\Sigma_\xi^{\mathrm{closed}} = \{\, i\gamma_n \,\}.} \tag{1.8}$$

这里 m_n 是 ξ 在相应零点处的解析重数。

因此，RH 的横向闭合与纵向谱生成、解析重数、规范算子实现、二点统计以及素数—零点结构属于不同层级。



图 05-01　RH 闭合后的四层谱对象。有限视界事件提升、实际闭合零点、一阶算子谱以及二阶/高阶统计属于四个不同对象层。事件提升保存生成履历但不是实际 ξ 零点；实际零点在 RH 后满足 $d_\rho = 0$；算子谱读取 γ_n 仍需精确的 Riemann 谱身份识别；GUE/CUE 等二阶关系只在一阶谱身份固定以后形成。

2. 闭合谱与事件提升

如果只保留实际闭合支撑

$$\{i\gamma_n\},$$

我们得到的是最终零点位置的一维纵向读数。它对实际零点是忠实的，却不保存此前有限乘法视界讨论中使用的互反事件履历：

$$0 \to d_E(\tau) \to 0 \to d_{E+1}(\tau) \to 0 \to \cdots. \tag{2.1}$$

原坐标中可写成

$$\boxed{\frac{1}{2} \to \left(\frac{1}{2} + d_E(\tau), \frac{1}{2} - d_E(\tau)\right) \to \frac{1}{2}.} \tag{2.2}$$

参数 τ 是有限视界事件的描绘参数，用来记录互反关系在事件内部的展开与闭合；它不具有物理时间含义。

由此形成三个不同层次：

$$\boxed{d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2}}$$

是实际零点坐标；

$$\boxed{d_E(\tau)}$$

是有限视界事件提升坐标；

而实际闭合谱满足

$$\boxed{d_\rho = 0.}$$

因此区分

$$\boxed{\text{实际闭合 Riemann 谱}}$$

与

$$\boxed{\text{有限视界事件谱提升.}}$$

前者只读取真实零点；后者允许事件内部 $d_E(\tau) \neq 0$，但只作为生成履历的提升坐标存在。

特别地，

$$\boxed{d_E(\tau) \neq d_\rho \quad \text{作为对象类型。}} \tag{2.3}$$

事件图中的“开放—闭合”描述有限视界互反履历，不改变实际 ξ 零点的坐标类型。

图 05-02 | 事件提升谱与实际闭合谱：同一终端接口，不同对象类型

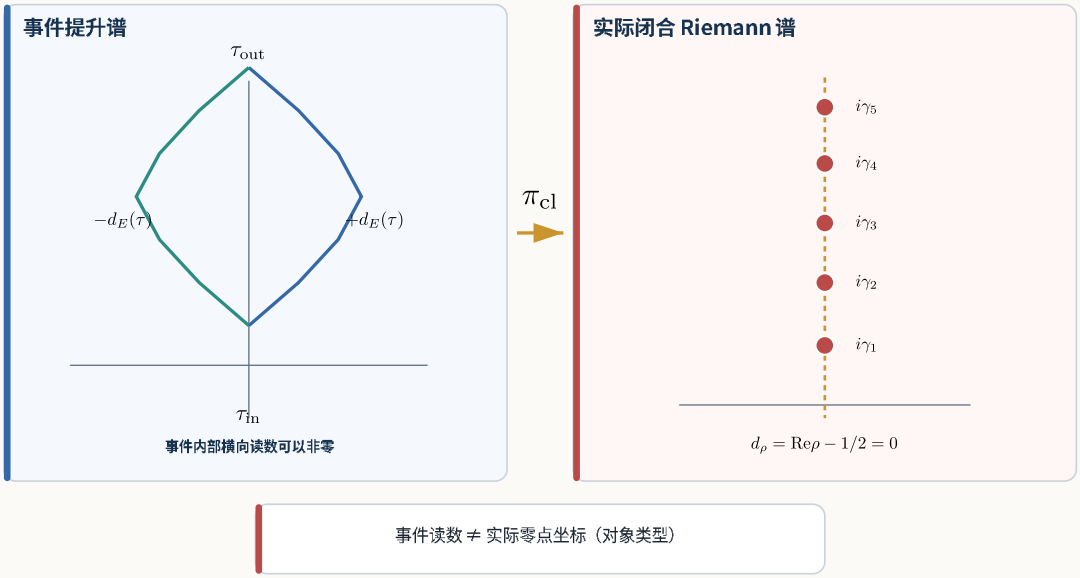


图 05-02　事件提升谱与实际闭合谱。事件谱允许 $d_E(\tau)$ 在一个完整事件内部从 0 展开为非零再回到 0，两叶由闭合截面映射 π_{cl} 接入实际 Riemann 读数；实际闭合谱则始终位于 $i\mathbb{R}$ 上。二者通过终端接口相连，但 $d_E(\tau) \neq d_\rho$ 作为对象类型。

3. 保真事件谱的定义

我们把一个有限视界互反事件记为

$$E.$$

它至少携带：

$$\gamma_E(\tau), \qquad d_E(\tau), \qquad I_E = [\tau_E^{\mathrm{in}}, \tau_E^{\mathrm{out}}],$$

并满足闭合条件

$$d_E(\tau_E^{\mathrm{in}}) = 0, \qquad d_E(\tau_E^{\mathrm{out}}) = 0. \tag{3.1}$$

定义它的两叶中心化提升：

$$\boxed{z_{E,\pm}(\tau) = \pm d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau).} \tag{3.2}$$

对应原 s-平面：

$$\boxed{\rho_{E,\pm}(\tau) = \frac{1}{2} \pm d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau).} \tag{3.3}$$

本章称一个事件谱表示为**保真（faithful）**，若它至少满足以下六项。

1. **中心保真**

两叶的横向中心恒为零：

$$\frac{\Re z_{E,+} + \Re z_{E,-}}{2} = 0.$$

2. **互反保真**

$$\iota(z_{E,+}) = z_{E,-}.$$

3. **闭合保真**

$$d_E = 0$$

时，两叶在同一事件闭合读数上汇合。

4. **实际零点读数保真**

事件提升与实际零点除子属于不同对象层；与第一章闭合读数一致的闭合截面进入实际 Riemann 读数。

5. **生成源保真**

乘法角色交换在谱侧具有明确对应。

6. **类型保真**

$L_\times, R, d_\rho, d_E, \gamma$ 按各自层级记录，并保持各自的对象类型。

上述定义只规定结构保真条件；度量、正性、自伴性与 Hilbert 范数属于后续算子层。

4. 最小局部事件载体

给定无序互反对

$$\{i\gamma_E + d_E,\ i\gamma_E - d_E\},$$

其首一二次多项式被唯一确定为

$$\boxed{\chi_E(z,\tau) = (z - i\gamma_E(\tau))^2 - d_E(\tau)^2.} \tag{4.1}$$

因此该局部事件载体由两叶事件唯一确定。

换句话说：

$$\boxed{\text{无序互反对} \Rightarrow \text{唯一首一二次载体.}} \tag{4.2}$$

展开：

$$\chi_E(z,\tau) = 0$$

恰好给出

$$z_{E,\pm}(\tau) = i\gamma_E(\tau) \pm d_E(\tau).$$

于是一个事件的谱面为

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{(\tau, z) : (z - i\gamma_E(\tau))^2 = d_E(\tau)^2\}.} \tag{4.3}$$

它是覆盖事件参数 τ 的两叶谱面：

$$\text{闭合支点} \to \text{两张表示叶} \to \text{闭合支点.}$$

这正是

$$0 \to d_E(\tau) \to 0$$

的谱语言。

图 05-03｜最小局部事件载体：两叶谱面从闭合支点展开，再回到闭合支点

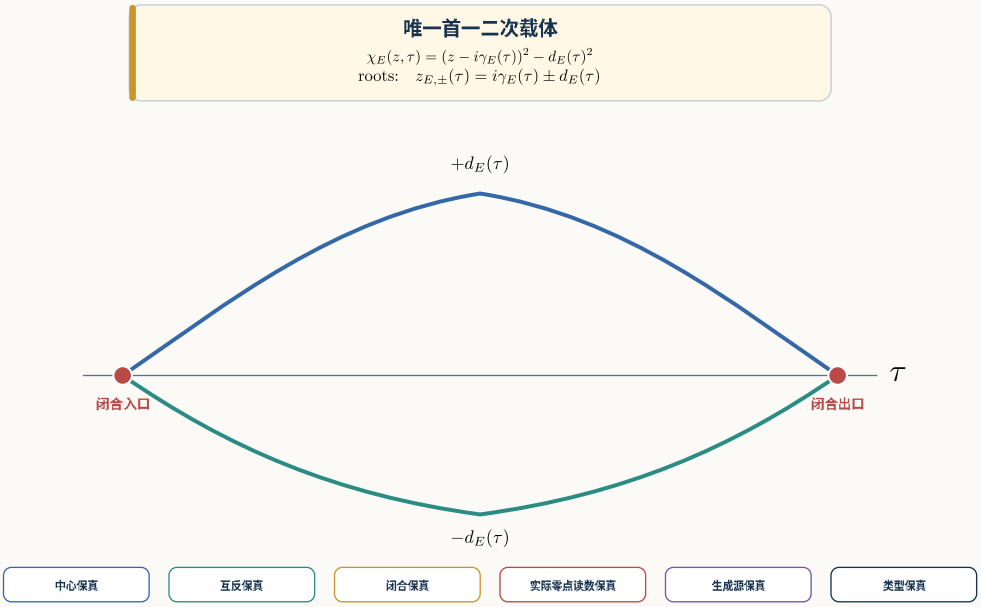


图 05-03　最小局部事件载体。无序互反对 $\{i\gamma_E + d_E,\ i\gamma_E - d_E\}$ 唯一确定首一二次载体 $\chi_E(z,\tau) = (z - i\gamma_E(\tau))^2 - d_E(\tau)^2$。其两张谱面从闭合支点展开，并在事件末端重新黏合；中心、互反、闭合、实际零点读数、生成源与类型六项保真条件共同规定这只是事件提升载体，而不是另一个实际零点谱。

5. 表示叶重数与解析零点重数

在闭合截面

$$d_E = 0$$

时，

$$\chi_E(z,\tau) = (z - i\gamma_E)^2. \tag{5.1}$$

这一二重根表示两张互反表示叶在闭合截面黏合：

两张互反表示叶在闭合截面黏合。

(5.2)

表示叶二重性与 ξ 的解析零点重数属于不同对象层。具体地，

$$\boxed{\text{闭合截面的表示叶二重性} \Rightarrow / \operatorname{ord}_{\frac{1}{2}+i\gamma_E}\xi = 2.} \tag{5.3}$$

第三章以零点除子

$$\mathcal{D}_\xi^+ = \sum_{n\geq 1} m_n\,[\rho_n]$$

独立记录解析零点重数；事件载体的表示叶重数不改变该除子权重。

图 05-04 | 闭合截面的两叶黏合，不等于 ξ 零点的解析二重性

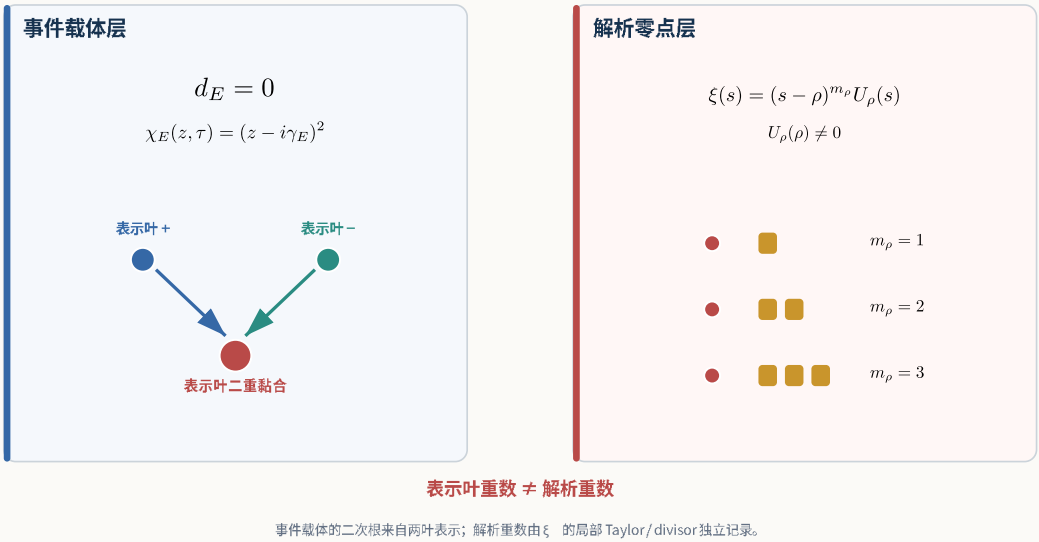


图 05-04　表示叶重数与解析重数严格分层。 当 $d_E = 0$ 时，事件载体退化为 $\chi_E = (z - i\gamma_E)^2$，这个二重根只表示两张互反表示叶在闭合截面黏合。实际 ξ 零点的解析重数仍由局部分解 $\xi(s) = (s-\rho)^{m_\rho} U_\rho(s)$ 独立记录，因此“事件载体二重”绝不推出 $m_\rho = 2$。

6. 实际闭合谱与事件提升谱

现在可以把两层放在一张图里：

$$\boxed{\widehat{\Sigma}_{\mathrm{evt}} = \bigsqcup_{E}\{\pm d_E(\tau) + i\gamma_E(\tau)\}} \tag{6.1}$$

是事件提升谱，而

$$\boxed{\Sigma_{\xi}^{\mathrm{closed}} = \{i\gamma_n\}} \tag{6.2}$$

是实际闭合 Riemann spectrum。

二者通过闭合截面相连：

$$\boxed{\text{事件履历} \overset{\text{closure section}}{\longrightarrow} \text{实际零点读数.}} \tag{6.3}$$

用闭合映射表示：

$$\pi_{\mathrm{cl}}: \widehat{\Sigma}_{\mathrm{evt}} \supset \{\tau = \tau_E^{\mathrm{out}}\} \to \Sigma_{\xi}^{\mathrm{closed}},$$

其中

$$d_E(\tau_E^{\mathrm{out}}) = 0.$$

7. 乘法生成源坐标：$L_\times$ 与 R

取乘法关系

$$mq = n.$$

定义总对数尺度

$$\boxed{L_\times = \log(mq) = \log n,} \tag{7.1}$$

以及相对 factor-role coordinate

$$\boxed{R = \log\frac{q}{m}.} \tag{7.2}$$

于是

$$\log m = \frac{L_\times - R}{2}, \qquad \log q = \frac{L_\times + R}{2}.$$

对中心化 Mellin 参数

$$s = \frac{1}{2} + z,$$

有

$$m^{-s}q^{-(1-s)} = e^{-L_\times/2}e^{zR}.$$

因此最小生成源核为

$$\boxed{K_z(L_\times, R) = e^{-L_\times/2}e^{zR}.} \tag{7.3}$$

这里

$$\boxed{L_\times = \text{total multiplicative log-scale}, \qquad R = \text{relative factor-role coordinate.}} \tag{7.4}$$

采用 $L_\times$ 而不采用 T，是为了把乘法总尺度与后续谱统计中通常用作零点高度的 T 严格区分。

角色交换

$$(m, q) \leftrightarrow (q, m)$$

给出

$$L_\times \mapsto L_\times, \qquad R \mapsto -R. \tag{7.5}$$

bare Mellin kernel 因而满足

$$K_z(L_\times, -R) = K_{-z}(L_\times, R). \tag{7.6}$$

而 completed zero symmetry 还包含共轭，于是

$$\overline{K_z(L_\times, -R)} = K_{-\bar{z}}(L_\times, R). \tag{7.7}$$

所以生成源角色交换与零点互反对合的正确握手是：

$$\boxed{R \mapsto -R \quad + \quad \text{complex conjugation} \quad \Leftrightarrow \quad z \mapsto -\bar{z}.} \tag{7.8}$$

其中角色交换提供 $R \mapsto -R$，共轭来自完成对象的实结构；二者共同对应中心化零点坐标上的互反对合。

8. 零点的两个正交方向：d_ρ 与 γ_ρ

对实际零点

$$\rho = \frac{1}{2} + d_\rho + i\gamma_\rho,$$

实际零点具有两个正交坐标方向：

$$\boxed{d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2}} \tag{8.1}$$

和

$$\boxed{\gamma_\rho = \Im\rho.} \tag{8.2}$$

d_ρ 读取的是实际零点相对于互反固定轴的横向偏离。

γ_ρ 读取的是 log-scale 上的振荡频率。因为

$$x^\rho = x^{1/2+d_\rho} e^{i\gamma_\rho \log x},$$

在 RH 闭合后 $d_\rho = 0$ 时，

$$x^\rho = x^{1/2} e^{i\gamma_\rho \log x}.$$

因此 γ_ρ 是 log-coordinate 上的 Mellin/Fourier 频率。

事件谱中的 $d_E(\tau)$ 描述有限视界互反履历；d_ρ 属于实际零点坐标。二者保持类型区分。

由此可见：

$$\boxed{\text{RH 固定的是实际横向坐标} d_\rho\text{，纵向坐标} \gamma_\rho \text{仍然保留。}} \tag{8.3}$$

随机矩阵、Hilbert–Pólya 与有限自伴谱主要读取 γ 方向，描述闭合后仍然保留的纵向结构。

9. 素数幂生成源谱与零点频率

标准 logarithmic derivative 给出

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=\sum_{p}\sum_{k\geq 1}(\log p)\,p^{-ks}. \tag{9.1}$$

在 log-coordinate 中，prime power 的位置为

$$\boxed{L_{p^k}=k\log p.} \tag{9.2}$$

它们属于生成源谱位置。

而零点的 γ_n 是全局完成对象的 collective Mellin/Fourier 读数。

全书固定：

$$\boxed{k\log p\neq\gamma_n \quad \text{作为类型恒等式。}} \tag{9.3}$$

正确关系是显式公式（explicit formula） 意义下的整体对偶，而不是逐点地址相等。

因此素数幂对数位置与零点纵坐标通过显式公式（explicit formula） 的整体结构关联，而不作逐点地址同一。

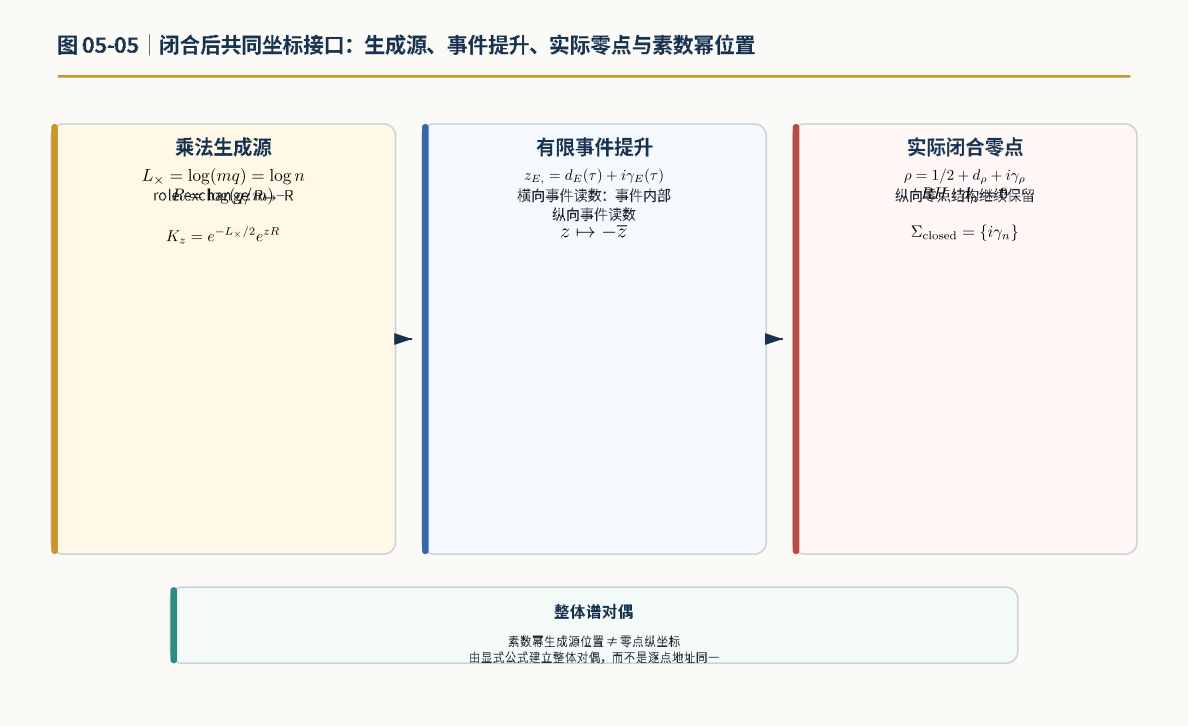


图 05-05　闭合后的共同坐标接口。 $L_\times, R$ 属于乘法生成源；$d_E(\tau), \gamma_E(\tau)$ 属于有限事件提升；d_ρ, γ_ρ 属于实际零点读数。RH 只把实际横向坐标固定为 $d_\rho=0$，纵向 γ_n 继续保留。素数幂位置 $k\log p$ 与零点纵坐标 γ_n 通过显式公式形成整体谱对偶，而不是逐点地址恒等。

10. 闭合后的保真谱图

现在几个坐标的位置可以固定下来：

层	坐标	作用/对称	数学角色

层	坐标	作用/对称	数学角色
乘法总尺度	$L_\times = \log(mq)$	$mq = n$	有限视界 / 总对数尺度
乘法相对角色	$R = \log(q/m)$	$R \mapsto -R$	因子角色互反
实际零点横向坐标	$d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2}$	$d_\rho \mapsto -d_\rho$	零点互反横向位移
事件提升横向坐标	$d_E(\tau)$	$d_E \mapsto -d_E$	有限视界展开/闭合
零点纵向坐标	$\gamma = \Im\rho$	相位 $e^{i\gamma R}$	全局集体频率
素数幂生成源位置	$k\log p$	乘法 → 对数平移	素数幂履历
事件提升	$\pm d_E + i\gamma_E$	$z \mapsto -\bar{z}$	双叶互反提升
实际闭合零点	$i\gamma_n$	固定集	$d_\rho = 0$
裸谱支撑	$\Gamma_+ = \{\gamma_n\}$	身份地址	不同纵坐标
除子数据	$\mathcal{D}_\xi^+ = \sum_{n\geq 1} m_n[\rho_n]$	解析重数	零点地址 + 解析重数

因此本章的核心谱图不是一个四坐标都可互换的等式，而是一张分层接口：

$$\boxed{(L_\times, R) \quad \rightsquigarrow \quad \text{生成源结构}, \qquad (d_\rho, \gamma) \quad \rightsquigarrow \quad \text{实际零点读数},} \tag{10.1}$$

并另有

$$\boxed{d_E(\tau)}$$

记录有限视界事件履历。

更完整地：

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & mq = n & \\ & \Downarrow & \\ L_\times = \log(mq) & & R = \log(q/m) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{有限视界} & & R \leftrightarrow -R \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \{k\log p\} & & z \leftrightarrow -\bar{z} \\ & & \Downarrow \\ & & \boxed{z_{E,\pm} = \pm d_E + i\gamma_E} \\ & & \boxed{(z - i\gamma_E)^2 - d_E^2 = 0} \\ & & \boxed{d_E(\tau_{\text{in}}) = 0 \to d_E(\tau) \to d_E(\tau_{\text{out}}) = 0} \end{array}} \tag{10.2}$$

实际 Riemann 读数则单独满足

$$\boxed{d_\rho = 0, \qquad \Gamma_+ = \{\gamma_n\}, \qquad \mathcal{D}_\xi^+ = \sum_{n\geq 1} m_n[\rho_n].} \tag{10.3}$$

这构成本章的保真事件谱图，并固定后续各谱层之间的对象接口。

11. Hilbert–Pólya：纵向谱实现

Hilbert–Pólya 路线寻求自伴算子 H，使 Riemann 零点纵坐标成为其实谱：

$$\sigma(H) = \{\gamma_n\},$$

并在保留解析重数时，使相应本征空间重数与 m_n 一致。

若独立建立

$$\xi\left(\frac{1}{2}+i\lambda\right)=0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(H), \tag{11.1}$$

则自伴性给出实谱，并形成独立的 RH 谱路线。

在本章的闭合后谱图中，Hilbert–Pólya 读取的是

$$\boxed{(d_\rho,\gamma)\mapsto\gamma.} \tag{11.2}$$

因此其对象位置是闭合后纵向谱的自伴实现。

全书中这一结构分成两个层级：

$$\boxed{\text{第五章（H05）} = \text{闭合后纵向谱图与接口},} \tag{11.3}$$

而第九章（H09）从乘法生成源出发，建立 source-generated Hilbert–Pólya 独立谱路线。两章分别承担闭合后谱图与独立源生成谱构造的职责。

12. Berry–Keating：尺度生成元与纵向谱

Berry–Keating 型 Hamiltonian

$$H_{\mathrm{BK}}=\frac{1}{2}(xp+px)$$

本质上是伸缩生成元，因此天然贴近对数尺度

$$L=\log n$$

和 Mellin 频率。

这解释了为什么该路线能够深刻复现 Riemann–Mangoldt counting 的半经典结构，也解释了为什么 Srednicki 的局部 RH 模型能够把相应 Mellin 零点的虚部与投影后的 Berry–Keating 谱联系起来。

在本章的保真谱图中，它主要读取

$$L/\gamma$$

这一尺度—频率方向；因子角色互反与事件提升属于另外的坐标层。

因此其在本章中的位置为：

$$\boxed{\text{尺度—频率几何的表示.}} \tag{12.1}$$

13. 随机矩阵：纵向谱的二阶与高阶关系

Montgomery–Odlyzko 与 GUE 类比主要描述的是纵坐标

$$\gamma_n$$

之间的间隔、二点相关以及更高阶局部统计。

在闭合后的谱中，这完全自然。RH 固定的是

$$d_\rho=0,$$

而闭合后的纵向地址

$$\Gamma_+ = \{\gamma_n\}$$

仍然保留全部局部排列问题。

因此随机矩阵理论可以对纵向谱给出高精度，而不需要重新触碰实际零点的横向坐标 d_ρ。

由此：

$$\boxed{\text{极强的}\gamma\text{-统计证据} \Rightarrow/\ \text{RH 的横向证明.}} \tag{13.1}$$

二者读取的对象层级不同。

还应进一步区分一点谱与二点自身关系。给定一阶谱测度 ν_{spec}，随机矩阵比较真正开始于类似

$$\nu_{\mathrm{spec}} \otimes \nu_{\mathrm{spec}}$$

的二点对象，并通常要先完成展开归一化（unfolding） 才能与平稳体区统计律比较。二点测度与形状因子（form factor） 之间可以通过 Fourier 变换互译。

因此本章把 GUE 先定位为：

$$\boxed{\text{闭合}\gamma\text{-谱的二阶自身关系与普适性.}} \tag{13.2}$$

第八章（H08）在这一一阶谱基础上进一步展开二点算术回译、有限高度修正与 ζ–GUE 握手。

14. Weil 正性：全局算术—谱响应

Weil explicit-formula criterion 的力量在于，素数侧与零点侧已经共同进入一个严格二次型。

因此但在本章谱图中，它做的是另一种压缩：

$$\boxed{(L_\times, R, d_\rho, \gamma, \text{生成源履历}) \mapsto \text{二次型 sign.}} \tag{14.1}$$

当正性与 RH 等价时，真正困难仍然是：

> 正性能否从独立生成源结构推出？

在闭合后的谱图中，Weil 二次型具有以下结构作用：

1. 它读取闭合谱对应的二次型符号；
2. 它构成素数—零点对偶的严格全局接口；
3. 它提供 RH 闭合后谱算子的自然内积或能量结构。

所以它从“闭合路线”转成：

$$\boxed{\text{全局算术—谱一致性结构.}}$$

15. de Branges 与 Θ_ω：横向扫描

考虑

$$\Theta_\omega(z)=\frac{\xi(\frac{1}{2}-\omega-iz)}{\xi(\frac{1}{2}+\omega-iz)}. \tag{15.1}$$

这里 ω 明确改变的是离临界线的横向距离。

因此在本章谱图中，它天然读取：

$$\boxed{d\text{-direction.}} \tag{15.2}$$

Suzuki 的 canonical system 工作说明了 Θ_ω 的 meromorphic-inner 性质与 RH 的深刻关系，并在 $\omega>1$ 的范围无条件构造了相关 canonical system；若相应构造能无条件扩展到全部 $\omega>0$，便给出 canonical system criterion。

闭合后，这一路线有一个非常清楚的新角色：

$$\boxed{\Theta_\omega=\text{闭合谱图的横向层析表示.}} \tag{15.3}$$

也就是说，它非常适合检验“实际谱只落在 $d_\rho=0$”如何在半平面几何、内函数性质与 Hamiltonian 正性中被重新表达。

它在闭合后谱图中重新表达 $d_h o=0$ 的横向几何。

16. Connes scaling / spectral triples：有限生成源与纵向谱

Connes–Consani 的 scaling 图景、zeta cycles 以及后续 Zeta Spectral Triples 都与有限乘法视界有天然对应。

特别是 2025 年的 Zeta Spectral Triples 构造了使用有限 Euler 素数数据的自伴算子；其低能谱在数值上与低位 Riemann zeros 高度吻合。该工作明确指出：若能够严格证明相应有限谱及正则化 determinant 在极限中收敛到完整目标对象，就会得到 RH。

从本章谱图看，这一结构可写为：

$$\boxed{\text{有限生成源谱}\to\gamma\text{-spectrum}} \tag{16.1}$$

真正困难的是

$$\boxed{\text{有限到全局谱保真.}} \tag{16.2}$$

有限层自伴性与有限到全局的谱识别属于两个不同问题。

有限自伴性本来就会给出实谱。

因此以下推理必须退出：

$$\boxed{\text{有限模型具有实谱}\ \not\Rightarrow\ \text{全局}\xi\text{满足 RH.}} \tag{16.3}$$

缺少的是精确识别与收敛，不是更多自伴性。

17. Suzuki 的有限 Weil 谱收敛：有限到全局的谱收敛

Suzuki 2026 的结果从局部化 Weil 二次型得到的有限区间 Hilbert 空间与特定自伴扩张，并在**假设 RH** 下证明其正本征值收敛到 Riemann ζ 非平凡零点的不同的正纵坐标。

这一结果在本章谱图中分成四个层级。

第一，**有限区间谱问题具有严格定义。**

对有限区间 $[-a,a]$ 的局部化 Weil 结构，只使用有限范围的算术数据，并由此定义局部自伴问题。

第二，**有限 a 的本征值给出 Riemann 纵坐标的严格逼近。**

若记相应 distinguished positive 本征值为 $t_{a,n}$，则在 RH 下 Suzuki 证明：

$$\boxed{t_{a,n} \geq \gamma_n, \qquad t_{a,n} \searrow \gamma_n \quad (a \to \infty).} \tag{17.1}$$

有限视界上的结构为：

$$\boxed{\text{严格定义的有限谱问题} \;\Rightarrow\; \text{近似纵坐标} t_{a,n},} \tag{17.2}$$

第三，**有限算子与全局算子之间存在精确的算子层关系。**

收敛证明使用精确的逆压缩恒等式：局部特定自伴扩张的逆算子，可以被识别为相应全局自伴算子逆算子的压缩。由此再结合递增局部空间与极小极大原理，得到 (17.1) 的单调谱收敛。

因此最准确的结构是：

$$\boxed{\text{严格定义的有限算子问题} \overset{\text{exact compression identity}}{\longrightarrow} \text{严格谱逼近} \underset{a\to\infty}{\to} \text{精确全局纵坐标.}} \tag{17.3}$$

第四，**极限层是精确的。**

除了逐固定 n 有

$$t_{a,n} \to \gamma_n,$$

相应归一化谱整函数还局部一致地收敛到由不同纵坐标构成的规范乘积：

$$\boxed{\frac{W(a,\pi;z)}{W(a,\pi;0)} \to \Delta_\Gamma(z),} \tag{17.4}$$

其中

$$\Delta_\Gamma(z) = \prod_{\gamma\in\Gamma_+} \left(1 - \frac{z^2}{\gamma^2}\right). \tag{17.5}$$

这里的对象层级为：Γ_+ 只列出 **不同纵坐标**，不自动记录 ξ 零点的解析重数。因此这一极限首先恢复身份层谱支撑。解析重数由第三章的零点除子另行记录；当全部零点解析简单时，相应归一化谱整函数与归一化 ξ 的重数层结构一致。

Suzuki 2026 在本章谱图中的结构位置可写为：

> **在 RH 已知后，由有限局部算术数据定义的自伴谱， 通过精确的算子 compression 机制， 严格并单调地收敛到真实的不同 Riemann 零点纵坐标。**
>
> (17.6)

这使它成为极强的

$$\boxed{\textbf{RH 闭合后的有限到全局谱保真定理,}} \tag{17.7}$$

该结果属于 RH 条件下的有限到全局谱收敛层。

它与 Θ_ω 一侧形成很漂亮的互补：

$$\boxed{\Theta_\omega\text{: } d_\rho\text{横向扫描,} \qquad \text{有限 Weil 谱: } \gamma\text{纵向扫描.}} \tag{17.8}$$

前者持续刻画横向/内函数/canonical system 结构，后者在 RH 假设下严格控制有限到全局纵向谱收敛。

从该路线的发展看，这类结果建立了有限谱结构与全局 Riemann 谱之间更精确的算子联系。从 Suzuki 2012 年关于 Riemann ξ 的 canonical system 工作，到围绕 Weil 二次型、自伴实现与谱收敛的结果，该路线逐步建立有限结构与全局 Riemann 谱之间的算子层保真关系。

其结构可概括为：

严格的闭合后谱收敛验证， 不是有限层精确相等； 但其有限算子关系是精确的， 其全局极限也是精确的。

(17.9)

两类结构分别读取横向与纵向谱信息。

18. Carathéodory–Fejér / 实零点机制：有限全实谱机制

Connes–van Suijlekom 的实零点定理表明，在适当二次型/自伴性条件下，相应 Fourier 变换的 zeros 可以被强制落在实轴。

这说明：

$$\boxed{\text{有限构造产生全实零点}}$$

属于有限表示层的实零点结构。

有限层全实与全局全实之间需要额外桥接：

$$\boxed{\text{有限全实} \Rightarrow \text{全局 Riemann 全实.}} \tag{18.1}$$

当有限族与全局 Ξ 之间建立收敛、行列式恒等式或零点对应时，有限层信息才能传递到全局对象。

有限谱结构与全局对象之间仍需通过收敛、行列式恒等式或零点对应建立完整联系。

19. 几何与上同调路线：固定轴的几何来源

有限域的 RH 型定理之所以能成立，与 Frobenius、cohomology、weights 与正性有深刻关系。

Connes 等人的 characteristic-one、Scaling Site、Riemann–Roch 与 Weil 上同调路线，真正有雄心解释的是：

$$\boxed{\text{全局算术谱的自然固定轴}} \tag{19.1}$$

在本章谱图中，这对应于：

$$\boxed{d_\rho = 0}$$

作为完成对象的全局读数的固定集。

第一章已经给出这一固定轴，因此几何路线在本章谱图中的作用是：

$$\boxed{\text{固定轴的几何与上同调来源.}} \tag{19.2}$$

这属于固定轴的固定轴的几何解释层。

20. 谱路线中的五类逻辑非等价

下列五组命题在逻辑上不等价；相应谱路线需要分别建立桥接条件。

20.1 对称性与固定点性

$$\rho \leftrightarrow 1-\bar{\rho}$$

只给出互反对称，与下列结论并不等价：

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

20.2 自伴性与 Riemann 谱识别

$$H = H^*$$

只保证

$$\sigma(H) \subset \mathbb{R}.$$

还需另行建立

$$\sigma(H) = \{\gamma_n\}.$$

20.3 有限全实谱与全局全实谱

需要精确收敛或零点对应。

20.4 生成源酉性与解析延拓零点

生成源酉性与解析延拓零点位置属于不同层级；对 ξ 的零点结论还依赖 Riemann 完成对象的具体结构。

20.5 素数对数位置与零点纵坐标

$$k\log p$$

与

$$\gamma_n$$

属于不同类型的谱数据。

这些非等价关系固定了各谱路线所需的独立桥接责任。



图 05-06　五类逻辑非等价。 互反对称不等于每个零点都是固定点；自伴性不等于谱就是 $\{\gamma_n\}$；有限全实谱不等于全局全实谱；生成源酉性不等于解析延拓后的零点位置；$k\log p$ 也不等于 γ_n。这些区分固定了每条谱路线真正需要承担的独立桥接责任。

21. 保真谱图的结构解释

21.1 临界实坐标 1/2

因为中心化互反对合

$$z \mapsto -\bar{z}$$

的固定集是

$$i\mathbb{R}.$$

回到 s-plane 就是

$$\Re s = \frac{1}{2}.$$

因此 1/2 是终端互反对合固定集在原 s-平面中的实坐标。

21.2 随机矩阵统计与 RH 横向闭合

随机矩阵主要读取闭合后仍然保留的 γ-方向，而 RH 固定实际横向坐标 d_ρ；二者属于不同坐标层。

21.3 有限自伴模型与全局 Riemann 谱

有限自伴模型的本征值为实数。

有限模型与全局 Riemann 谱之间还需建立：

> 有限实谱与全局 Riemann 谱之间的精确识别与收敛

21.4 横向扫描与纵向谱读取

前者天然扫描横向 d_ρ 方向，后者天然读取纵向 γ 方向。

二者读取的是不同的正交方向。

21.5 素数幂与零点的整体谱对偶

因为

$$k\log p$$

是生成源位置，

而

$$\gamma_n$$

是全局频率读数。

显式公式（explicit formula） 建立的是整体对偶，不是地址同一。

21.6 事件叶重数与解析零点重数

事件载体的二重性来自双叶事件载体的黏合，而不是来自 ξ 的 Taylor 展开。

因此谱面分支重数与解析零点重数属于不同层级。

21.7 多种保真表示与规范算子

因为完整 Riemann 对象同时携带生成源尺度、因子角色互反、实际零点坐标、纵向坐标、解析重数与更多完成化信息。不同数学表示天然擅长读取不同投影。

因此不应要求：

不同保真表示可读取 Riemann 对象的不同投影.

但这并不排除在某个明确明确规范下存在一个规范酉等价类。

各保真表示的共同接口满足：

不同表示在共同接口上给出兼容的同一 Riemann 读数。

(21.1)

多表示并存与特定信息层的规范酉等价类属于两个不同层级。

21.8 RH 闭合后的剩余谱结构

因为 RH 只给出：

$$d_\rho = 0.$$

它没有给出：

- γ_n 的自然源生成（source-generated） 算子；
- 零点的解析简单性；
- 身份地址与解析重数的规范谱表示；
- 精确的素数—零点重建；
- GUE 二点与高阶统计的生成来源；
- 有限到全局收敛机制；
- canonical system 的全参数无条件实现；
- 几何/上同调实现。

因此 RH 闭合之后，纵向谱生成、重数、算子实现、统计关系和几何实现继续作为彼此区分的谱结构存在。

22. 谱表示的保真条件

对任意 Riemann 谱表示 $\mathcal{M}$，其与本章谱图的兼容性由以下条件核验：

F1.	$\mathcal{M}$ 对$L_\times$的读取方式明确;
F2.	$\mathcal{M}$ 对R及$R \mapsto -R$的表示明确;
F3.	$\mathcal{M}$ 区分实际d_ρ与事件$d_E(\tau)$;
F4.	$\mathcal{M}$ 明确产生或读取γ_n的机制;
F5.	$\mathcal{M}$ 保留互反角色或其等价表示;
F6.	$\mathcal{M}$ 区分支撑地址与解析重数;
F7.	$\mathcal{M}$ 的有限视界或有限截断结构明确;
F8.	$\mathcal{M}$ 给出有限生成源到全局零点对象的保真桥;
F9.	$\mathcal{M}$ 区分表示叶重数与解析零点重数;
F10.	$\mathcal{M}$ 进入 GUE 层时区分一点谱与二点自身关系.

(22.1)

这些条件把不同谱表示放入同一坐标体系中比较，并明确每一表示所保留的数据层与所需的桥接结构。

23. 闭合后的谱路线分层

路线	主要读取	主要结构	全书中的位置
Hilbert–Pólya	γ 与可能的谱重数	精确自伴实现	本章中对应 RH 闭合后的纵向谱实现；第九章给出独立的 source-generated 谱路线
Berry–Keating	L, γ	尺度/半经典计数	尺度—频率结构
随机矩阵	γ 的二点/高阶统计	间隔/普适性	纵向谱的二阶与高阶自身关系
Weil 正性	全局生成源—零点响应	算术二次型符号	全局一致性与正性编码
de Branges / Θ_ω	d_ρ	横向扫描 / 内函数几何	横向层析表示
Connes scaling / zeta cycles	log-scale,γ	有限素数谱实现	有限到全局谱保真结构
Zeta Spectral Triples	有限生成源 $\rightarrow \gamma$	数值/自伴有限谱	有限纵向谱实现
Suzuki 有限 Weil 谱	有限视界 $\rightarrow \gamma$	RH 下的严格单调收敛；精确逆压缩机制	有限到全局谱收敛
几何/上同调	固定轴 / 全局结构	解释中心轴的自然性	固定轴的几何解释层

该表记录：

每条路线究竟看见了 Riemann 对象的哪一部分。

(23.1)

第六至第九章分别展开规范谱对象、谱见证、ζ–GUE 二阶接口与独立 Hilbert–Pólya 构造。

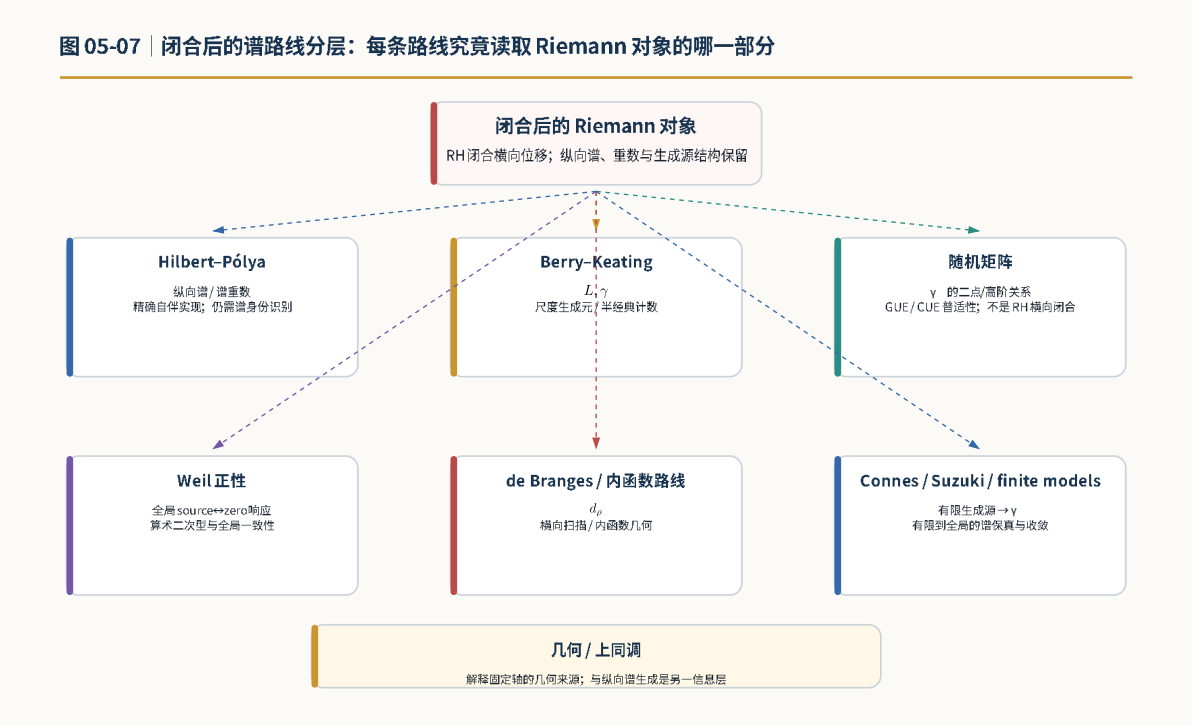


图 05-07　闭合后的谱路线分层。 Hilbert－Pólya、Berry－Keating、随机矩阵、Weil 正性、de Branges、Connes/Suzuki/有限自伴模型以及几何/上同调路线读取的是同一闭合 Riemann 对象的不同投影：纵向谱、尺度—频率、二阶自身关系、全局算术响应、横向扫描、有限到全局谱保真以及固定轴的几何来源。多种保真表示可以并存，但不能把不同投影的结论彼此偷换。

24. 谱图层的逻辑边界

本章各对象之间的逻辑关系固定如下。

事件载体

$$\chi_E(z,\tau) = (z - i\gamma_E)^2 - d_E^2$$

编码有限视界互反事件的两叶结构；RH 的实际横向闭合

$$d_\rho = 0$$

来自第一章的终端固定角色结论。

生成源角色交换

$$R \mapsto -R$$

与完成对象的实结构共同对应中心化零点坐标上的互反对合；它与实际零点横向坐标 d_ρ 保持类型区分。

有限自伴谱提供有限层实谱结构；其与完整 Riemann 谱之间的关系由谱识别、收敛或行列式结构另行确定。

素数幂位置

$$k\log p$$

属于生成源谱位置，零点纵坐标

$$\gamma_n$$

属于完成对象的集体频率读数；二者通过显式公式的整体结构联系。

事件提升的

$$d_E(\tau)$$

只属于有限视界事件履历，不进入实际零点横向坐标。相应地，事件载体闭合时的表示叶重数与 ξ 的解析零点重数由不同对象记录。

随机矩阵与 GUE 结构作用于闭合后的纵向谱及其二点、高阶自身关系，其逻辑位置位于 RH 横向闭合之后。

综上，谱图层的类型关系可压缩为

$$\boxed{\text{事件提升层} \neq \text{实际零点层} \neq \text{算子识别层} \neq \text{二阶统计层}.} \tag{24.1}$$

25. 结论

第一章给出的闭合结论为

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

在这一横向闭合基础上，本章把闭合后的 Riemann 对象分解为以下坐标层：

乘法生成源具有

$$\boxed{L_\times = \log(mq), \qquad R = \log(q/m).}$$

实际零点具有

$$\boxed{d_\rho = \Re\rho - \frac{1}{2}, \qquad \gamma_\rho = \Im\rho.}$$

而有限视界事件履历另外使用

$$\boxed{d_E(\tau).}$$

其中

$$\boxed{d_E(\tau) \neq d_\rho}$$

作为对象类型。

RH 闭合只给出

$$\boxed{d_\rho = 0.}$$

实际闭合谱还应区分不同地址支撑

$$\Gamma_+ = \{\gamma_n\}$$

与带解析重数的除子数据

$$\mathcal{D}_\xi^+ = \sum_{n\geq 1} m_n\,[\rho_n].$$

有限视界生成履历则可通过双叶事件提升

$$\boxed{(z - i\gamma_E)^2 - d_E^2 = 0}$$

保存，但这一事件载体不是完整 ξ 的离轴零点集合。

因此本章得到：

RH 闭合后的保真事件谱图。

由此，不同谱路线可以在同一坐标账本中比较。

在这张底图上：

- Hilbert–Pólya 主要读取 γ 的自伴实现；
- Berry–Keating 主要读取对数尺度与频率；
- 随机矩阵理论读取闭合 γ-谱的二点及高阶自身关系；
- Weil 正性读取全局算术—谱二次型符号；
- de Branges / canonical systems 强烈触及横向 d_ρ 方向；
- 有限谱构造读取有限生成源到纵向谱的逼近；
- 几何/上同调路线试图解释固定轴的自然性。

这些路线分别读取 Riemann 对象的不同投影，其共同接口为：

对象层级、保留数据、压缩数据与共同读数接口

第六章把闭合零点数据组织为任毅飞算子，第七章建立规范谱见证，第八章进入 GUE 二阶自身关系；第九章随后回到乘法生成源，独立构造 source-generated Hilbert–Pólya 谱路线。

因此本章在全书中的连接关系为：

RH 闭合 → 保真事件谱图 → 规范谱、谱见证与二阶统计结构.

后续章节进一步回答：

规范谱构造、谱身份见证、GUE 二阶接口与独立源生成谱路线

第六章　RH 任毅飞算子：乘法身份、解析延拓与规范谱之间的无损桥梁

摘要

第五章给出闭合后的保真事件谱图；本章进入算子层。令

$$X(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + z\right),$$

并对非平凡零点

$$\rho = \frac{1}{2} + a_\rho$$

定义中心化零点坐标

$$a_\rho = \rho - \frac{1}{2} = d_\rho + i\gamma_\rho, \qquad \gamma_\rho > 0.$$

在按解析重数构成的 Hilbert 空间上定义任毅飞算子（Yifei Ren operator）

$$K_{\mathrm{Ren}} e_{\rho,j} = (-ia_\rho) e_{\rho,j} = (\gamma_\rho - id_\rho) e_{\rho,j}.$$

它是 RH 之前即已定义的正规算子，并具有强交换分解

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} - i\Delta_{\mathrm{Ren}},}$$

其中

$$\Gamma_{\mathrm{Ren}} e_{\rho,j} = \gamma_\rho e_{\rho,j}, \qquad \Delta_{\mathrm{Ren}} e_{\rho,j} = d_\rho e_{\rho,j}.$$

因此

$$\boxed{\mathrm{RH} \Leftrightarrow \Delta_{\mathrm{Ren}} = 0 \Leftrightarrow K_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{*} > 0.}$$

进一步定义

$$B_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{-2}.$$

由 Riemann–von Mangoldt 零点计数、偶整函数的 Hadamard 分解与 trace-class Fredholm 行列式，

$$B_{\mathrm{Ren}} \in \mathfrak{S}_1,$$

并且

$$\boxed{\frac{X(w)}{X(0)} = \det(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}}),}$$

以及

$$\boxed{\frac{X'(w)}{X(w)} = 2w\mathrm{Tr}[B_{\mathrm{Ren}}(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}})^{-1}].}$$

完整 Ren–Riemann 谱对象记为

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} = (\mathcal{H}_{\mathrm{Ren}}, K_{\mathrm{Ren}}, J_{\mathrm{Ren}}, c_*, \kappa_*, C_\xi),}$$

其中

$$c_* = \frac{1}{2}, \qquad \kappa_* = X(0),$$

而

$$C_\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$$

是 Riemann 完成化乘子。该完整对象保留中心化坐标、解析重数、互反对称、中心锚点、Fredholm 归一化以及完成化标记。

沿标准 Riemann 规范，存在双向恢复链

$$\boxed{\mathfrak{M}_\times \leftrightarrow \zeta_{\mathrm{germ}} \leftrightarrow \zeta_{\mathrm{global}} \leftrightarrow \xi \leftrightarrow X \leftrightarrow \boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}},}$$

其中

$$\mathfrak{M}_\times = (\mathbb{N}, \mathcal{R}_\times, \ell), \qquad \ell(n) = \log n,$$

是第一章根乘法身份

$$\mathfrak{I}_\times = (\mathbb{N}_{>0}, \mu)$$

的带尺度关系实现。反向恢复经由

$$\eta_\times = \sum_{n\geq 1} \delta_{\log n}$$

以及 Laplace / Dirichlet 唯一性返回解析延拓之前的整数乘法关系。

因此，本章所称“无损桥梁”指在标准 Riemann 规范下的双向可恢复性：不同数学类型保持各自对象身份，但其规范信息可以沿确定映射正向生成并反向恢复。RH 成立后，

$$\boxed{H_{\mathrm{Ren}} := K_{\mathrm{Ren}}|_{\mathrm{RH}}}$$

成为正自伴的规范 Riemann 谱算子，并与第五章的闭合谱图、第七章的谱见证和第八章的 GUE 二阶自身关系形成连续接口。

1. 算子位置、对象层级与命名

第五章已经把闭合后的 Riemann 零点数据分成实际零点坐标、解析重数与事件提升层。本章在此基础上构造同时保存

$$(d_\rho, \gamma_\rho)$$

的全坐标正规算子，并建立乘法身份、解析延拓、Riemann 完成对象与规范谱对象之间的双向恢复关系。

本章的算子结构包括四个层级：全坐标任毅飞算子；隐藏横向算子与 RH 的等价算子表述；trace-class 平方逆算子所给出的 Fredholm / resolvent 恢复；以及完整标记对象所实现的乘法—解析—谱双向可恢复性。

1.1 本章的逻辑位置

本章使用标准的 Riemann ζ/ξ 理论、复分析、谱论、trace-class 理论以及 Laplace / Dirichlet 唯一性。其逻辑链为

$$\boxed{\text{闭合零点除子} \to \text{全坐标 Ren 算子} \to \text{完整 Ren–Riemann 对象} \leftrightarrow \text{乘法—解析履历.}}$$

第五章提供闭合后的谱图接口；第七章建立规范谱身份见证；第八章进入 GUE 二阶自身关系；第九章从乘法生成源独立构造 Hilbert–Pólya 谱路线。本章承担的是从 Riemann 完成零点除子到规范算子对象及其反向恢复结构的构造。

1.2 对象层级与命名规范

本章区分以下三个核心层级：RH 前的全坐标正规算子、RH 后的规范自伴特化，以及携带恢复标记的完整谱对象。

1.3 无条件全坐标算子

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}}}$$

在 RH 之前即由中心化零点除子定义。它同时保存

$$a_\rho = d_\rho + i\gamma_\rho$$

的纵向与横向坐标，并分解为

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} - i\Delta_{\mathrm{Ren}}.}$$

其中

$$\Gamma_{\mathrm{Ren}}$$

称为**纵坐标算子**，而

$$\Delta_{\mathrm{Ren}}$$

称为**隐藏横向偏离算子**。定义

$$\boxed{\delta_{\mathrm{Ren}} = \| \Delta_{\mathrm{Ren}} \|}$$

为全局横向缺陷。

1.4 RH 特化

RH 成立时

$$d_\rho = 0, \qquad \Delta_{\mathrm{Ren}} = 0,$$

故

$$K_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{*} > 0.$$

定义

$$\boxed{H_{\mathrm{Ren}} := K_{\mathrm{Ren}}|_{\mathrm{RH}}.}$$

H_{Ren} 称为**规范 Riemann 谱算子**。其酉等价类记为

$$\boxed{\mathfrak{R}_{\mathrm{Ren}} := [H_{\mathrm{Ren}}]_{\mathrm{u}},}$$

称为 **Ren–Riemann 谱类**。

1.5 完整标记谱对象

为了保留中心锚点、归一化、完成化规则和互反对称，定义

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}}$$

为**完整标记 Ren–Riemann 谱对象**，并记其标记酉等价类为

$$\boxed{\mathfrak{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}.}$$

完整对象不仅包含 Hilbert 空间和 K_{Ren}，还保留

$$J_{\mathrm{Ren}}, \qquad c_*, \qquad \kappa_*, \qquad C_\xi,$$

从而支持后文的乘法—解析—谱双向恢复。

1.6 相关下游对象

RH 前定义

$$\boxed{B_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{-2},}$$

称为 **Ren 平方逆算子**。它是正规 trace-class 算子；RH 成立后为正算子。若需要强调 RH 后的正除子读法，可记相应正算子为

$$B_{\mathrm{div}}.$$

进一步定义带符号裸谱算子

$$\boxed{D_{\mathrm{Ren}} = H_{\mathrm{Ren}} \oplus (-H_{\mathrm{Ren}}),}$$

其谱为

$$\sigma(D_{\mathrm{Ren}}) = \{\pm\gamma_n\}$$

并按解析重数计。该对象用于第八章的双边谱与二阶统计接口。

全书中的对象层级因此为

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \supset K_{\mathrm{Ren}} \overset{\mathrm{RH}}{\to} H_{\mathrm{Ren}} \to D_{\mathrm{Ren}} \text{ 或其他裸谱读数.}}$$

图 06-01｜Ren 算子的对象层级：无条件全坐标、RH 特化与完整标记对象



图 06-01　Ren 算子的对象层级。 本章首先在 RH 之前由中心化零点除子定义无条件全坐标 K_{Ren}，同时保存横向与纵向坐标；RH 成立后才特化为正自伴 H_{Ren}。真正承担双向恢复的是包含对合、中心锚点、归一化常数与完成化标记的完整 Ren–Riemann 对象，而不是裸对角谱本身。

2. 乘法身份、Dirichlet 区域与解析延拓

2.1 带尺度的乘法身份

Riemann ζ 的数值尺度由标准正整数结构及其对数尺度共同固定。本章的无损链以带尺度标记的乘法实现为起点：

$$\boxed{\mathfrak{M}_{\times} = (\mathbb{N}, \mathcal{R}_{\times}, \ell),}$$

其中

$$\mathcal{R}_{\times} = \{(m, q, n) \in \mathbb{N}^3 : mq = n\},$$

且

$$\ell : \mathbb{N} \to [0, \infty), \qquad \ell(n) = \log n.$$

尺度满足

$$\boxed{\ell(mq) = \ell(m) + \ell(q).}$$

这正是乘法进入 additive spectral/transform language 的规范坐标。

2.2 解析延拓之前的乘法对数账本

定义正离散测度

$$\boxed{\eta_{\times} = \sum_{n \geq 1} \delta_{\log n}.}$$

它把标准正整数乘法尺度完整记录在

$$S_{\times} := \operatorname{supp} \eta_{\times} = \{\log n : n \in \mathbb{N}\}.$$

对 $\Re s > 1$，

$$\int_{[0,\infty)} e^{-sx} \, d\eta_{\times}(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-s \log n} = \sum_{n \geq 1} n^{-s}.$$

因此

$$\boxed{\zeta_{\mathrm{germ}}(s) = \mathcal{L}\eta_{\times}(s), \qquad \Re s > 1.}$$

等价地，在

$$\mathcal{H}_{\mathrm{mult}} = \ell^2(\mathbb{N})$$

上定义

$$H_{\mathrm{mult}} e_n = (\log n) e_n.$$

则

$$\boxed{\zeta_{\mathrm{germ}}(s) = \mathrm{Tr}(e^{-sH_{\mathrm{mult}}}), \qquad \Re s > 1.}$$

这里 H_{mult} 是解析延拓前的乘法源算子，属于乘法生成层；K_{Ren} 属于完成零点的规范谱层。

2.3 从对数账本精确恢复乘法关系

由

$$S_{\times} = \{\log n\},$$

定义

$$\boxed{\mathcal{R}_{\times}^{\log} = \{(x, y, z) \in S_{\times}^{3} : x + y = z\}.}$$

指数映射

$$\exp: S_{\times} \to \mathbb{N}$$

给出

$$e^{x}e^{y} = e^{z} \Leftrightarrow x + y = z.$$

因此

$$\boxed{(\exp x, \exp y, \exp z) \in \mathcal{R}_{\times} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \mathcal{R}_{\times}^{\log}.}$$

故

$$\boxed{\eta_{\times} \Rightarrow S_{\times} \Rightarrow \mathcal{R}_{\times}^{\log} \Rightarrow \mathcal{R}_{\times}.}$$

这说明解析延拓前的 Dirichlet/Laplace 解析芽并非只保留一串函数值；在其规范 Dirichlet 表示下，它保留完整标准乘法账本。

2.4 Dirichlet / Laplace 唯一性

定理 2.1（乘法对数账本恢复定理）

设 η_1, η_2 为 $[0, \infty)$ 上局部有限正 Borel 测度，并存在 $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ 使得对每个 $\sigma > \sigma_0$，

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\sigma x}\, d\eta_j(x) < \infty, \qquad j = 1,2.$$

若存在 $\sigma_1 > \sigma_0$，使

$$\int e^{-sx}\, d\eta_1(x) = \int e^{-sx}\, d\eta_2(x) \qquad (s > \sigma_1),$$

则

$$\boxed{\eta_1 = \eta_2.}$$

特别地，ζ_{germ} 在正测度类中唯一确定

$$\boxed{\eta_\times = \sum_{n\geq 1} \delta_{\log n}.}$$

证明

固定 $s_0 > \sigma_1$，定义有限正测度

$$d\mu_j(x) = e^{-s_0 x}\, d\eta_j(x).$$

其有限性由假设保证。对任意 $t > 0$，有

$$\int e^{-tx}\, d\mu_1(x) = \int e^{-(s_0+t)x}\, d\eta_1(x) = \int e^{-(s_0+t)x}\, d\eta_2(x) = \int e^{-tx}\, d\mu_2(x).$$

将 $x \mapsto y = e^{-x}$ 推到 $(0,1]$，记所得有限测度为 ν_j。则对所有整数 $n \geq 1$，

$$\int_{(0,1]} y^n\, d\nu_1(y) = \int_{(0,1]} y^n\, d\nu_2(y).$$

令 $t \downarrow 0$，由单调收敛得到两测度总质量也相同，因此 $n = 0$ 的矩亦相同。多项式在 $C([0,1])$ 中稠密，故两有限测度对每个连续函数积分相同。Riesz 表示唯一性给出

$$\nu_1 = \nu_2.$$

由 $x \mapsto e^{-x}$ 的单射性，推出 $\mu_1 = \mu_2$，再乘回正权 $e^{s_0 x}$ 得

$$\eta_1 = \eta_2.$$

对

$$\eta_\times = \sum_{n\geq 1} \delta_{\log n}$$

有

$$\int e^{-\sigma x}\, d\eta_\times(x) = \sum_{n\geq 1} n^{-\sigma} = \zeta(\sigma) < \infty \qquad (\sigma > 1),$$

故定理适用。证毕。

推论 2.2

在标准实尺度与指数映射下，ζ_{germ} 唯一恢复 $\eta_\times$，而 $\eta_\times$ 的支撑唯一恢复一个与标准正整数乘法结构相同的带尺度标记的乘法系统。因此

$$\boxed{\zeta_{\mathrm{germ}} \Rightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{R}_\times, \ell)}$$

表示给定标准规范下的确定恢复。

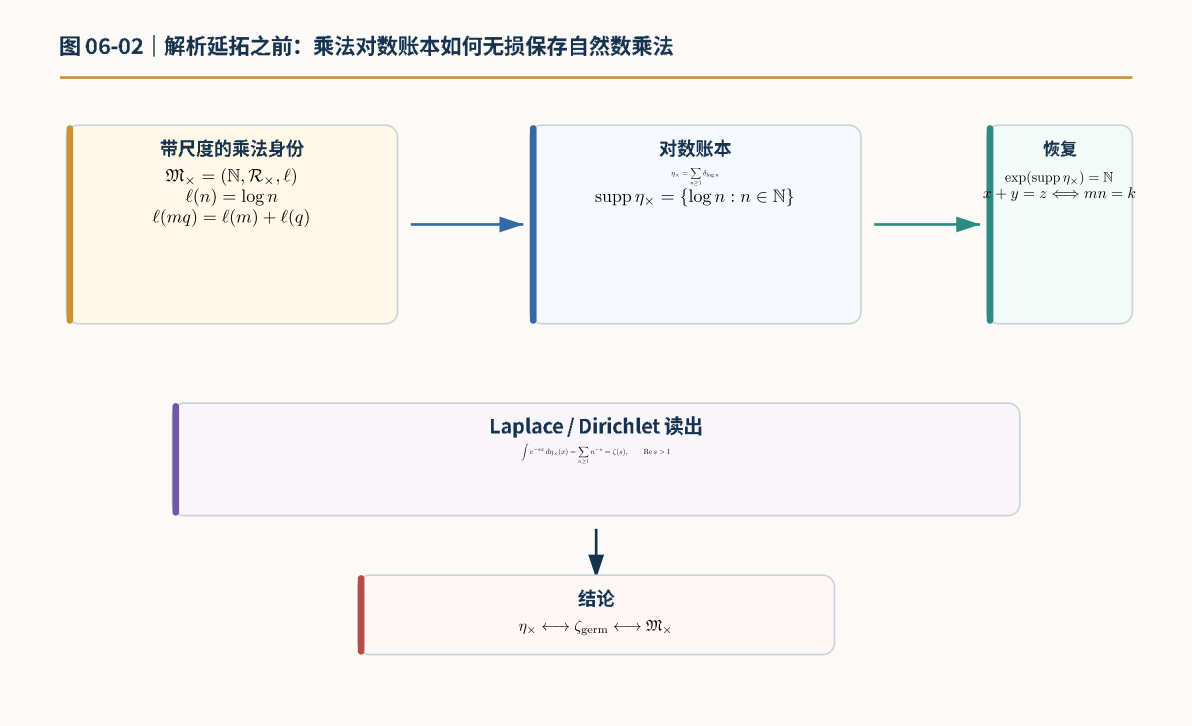


图 06-02　乘法对数账本。 正离散测度 $\eta_\times = \sum_{n\geq 1} \delta_{\log n}$ 把整数乘法尺度保存为 $\{\log n\}$。指数映射恢复标准自然数对象，而加法关系 $\log m + \log n = \log(mn)$ 精确恢复乘法关系；在 $\Re s > 1$ 上，它的 Laplace–Dirichlet 读出就是 ζ 的原始 Dirichlet germ。因此解析延拓之前已经存在一个可双向恢复的乘法账本。

2.5 解析延拓的双向唯一性

令

$$\zeta_{\mathrm{global}}$$

为 ζ_{germ} 的标准亚纯延拓。

唯一解析延拓给出正向映射

$$\zeta_{\mathrm{germ}} \to \zeta_{\mathrm{global}}.$$

反向只需限制：

$$\boxed{\zeta_{\mathrm{global}}|_{\Re s>1} = \zeta_{\mathrm{germ}}.}$$

故

$$\boxed{\zeta_{\mathrm{germ}} \leftrightarrow \zeta_{\mathrm{global}}}$$

在本章规定的标准 Riemann 规范下是可逆的。

这里的可逆性限定在同一个 Riemann 解析芽及其唯一解析延拓之间：限制到 $\Re s > 1$ 恢复原解析芽。

2.6 完成化与已知标记

定义

$$C_\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right),$$

以及

$$\boxed{\xi(s) = C_\xi(s)\zeta_{\text{global}}(s).}$$

所以正向为

$$\zeta_{\text{global}} \to \xi.$$

反向为 meromorphic recovery

$$\boxed{\zeta_{\text{global}}(s) = \frac{\xi(s)}{C_\xi(s)}.}$$

因此，完成化的 Archimedean 因子与归一化数据作为规范标记保存；裸零点集合与完整完成对象属于不同信息层级。

3. 中心化 Riemann 完成函数与任毅飞算子

3.1 中心化与偶完成函数

定义

$$c_* = \frac{1}{2}, \qquad X(z) = \xi(c_* + z).$$

标准函数方程与实结构分别给出

$$X(z) = X(-z), \qquad X(\bar{z}) = \overline{X(z)}.$$

故零点除子关于

$$z \mapsto -z, \qquad z \mapsto \bar{z}$$

保持重数闭合。

引理 3.1（无实中心化零点）

X 在实轴上没有零点。因此每个 $\{a, -a\}$ 零点轨道恰有一个代表位于上半平面。

证明

$X(x) = 0$ 对实 x 等价于 $\xi(1/2 + x) = 0$。ξ 的零点恰为 ζ 的非平凡零点，因此若 $|x| < 1/2$，这会给出 $0 < s < 1$ 上的实 $\zeta(s)$ 零点。对 $s > 0$，Dirichlet eta 函数

$$\eta(s)=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}n^{-s}$$

由交错级数判别为正，而

$$\eta(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s).$$

当 $0<s<1$ 时 $1-2^{1-s}<0$，故 $\zeta(s)<0$，不存在零点。端点 $s=0,1$ 对应 $\xi(0)=\xi(1)=1/2\neq 0$。故 X 无实零点。证毕。

对非平凡零点 ρ，沿用第五章的中心化零点坐标

$$\boxed{a_\rho:=\rho-\frac{1}{2}=d_\rho+i\gamma_\rho.}$$

记上半平面中心化零点支撑为

$$\mathcal{Z}_+=\{a_\rho: X(a_\rho)=0,\ \Im a_\rho>0\},$$

并按解析重数

$$m_\rho=\mathrm{ord}_\rho\xi$$

计。

在本章算子公式中，为简洁起见写

$$a=a_\rho=d_a+i\gamma_a,\qquad m(a)=m_\rho.$$

由非平凡零点位于 $0<\Re s<1$，

$$|d_a|<\frac{1}{2}.$$

3.2 全坐标 Ren Hilbert 空间

定义

$$\boxed{\mathcal{H}_{\mathrm{Ren}}=\oplus_{a\in\mathcal{Z}_+}\mathbb{C}^{m(a)}.}$$

取正交基

$$e_{a,j},\qquad 1\leq j\leq m(a).$$

这是解析重数保真的除子空间。

3.3 全坐标 Ren 算子

定义 3.2（任毅飞算子）

在

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Ren}} = \oplus_{a\in Z_+}\mathbb{C}^{m(a)}$$

上定义

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}}e_{a,j} = (-ia)e_{a,j}.}$$

若 $a = d_a + i\gamma_a$，则

$$-ia = \gamma_a - id_a.$$

定义域为

$$\boxed{D(K_{\mathrm{Ren}}) = \left\{c = (c_{a,j}): \sum_{a,j} |\,a|^2|c_{a,j}|^2 < \infty\right\}.}$$

定理 3.3（无条件全坐标 Ren 算子）

K_{Ren} 是稠密定义、闭、正规算子；其伴随算子为

$$K^*_{\mathrm{Ren}}e_{a,j} = \overline{-ia}\,e_{a,j} = (\gamma_a + id_a)e_{a,j},$$

且

$$D(K^*_{\mathrm{Ren}}) = D(K_{\mathrm{Ren}}).$$

其谱为

$$\boxed{\sigma(K_{\mathrm{Ren}}) = \{-ia: a \in Z_+\},}$$

每个本征值按解析重数 $m(a)$ 计；谱无有限聚点，且 K_{Ren} 具有紧预解式。

证明

有限支撑向量属于定义域且在 $\mathcal{H}_{\mathrm{Ren}}$ 中稠密，故 K_{Ren} 稠密定义。若 $c^{(n)} \to c$ 且 $Kc^{(n)} \to b$，则对每个坐标

$$(-ia)c^{(n)}_{a,j} \to b_{a,j}, \qquad c^{(n)}_{a,j} \to c_{a,j},$$

故 $b_{a,j} = (-ia)c_{a,j}$。又 $b \in \ell^2$ 意味着

$$\sum_{a,j} |\,a|^2|c_{a,j}|^2 = \| b \|^2 < \infty,$$

故 $c \in D(K)$ 且 $Kc = b$，所以 K 闭。

对角算子的伴随算子由共轭对角系数给出，而

$$|-ia| = |a| = |\overline{-ia}|,$$

所以 $D(K^*) = D(K)$。于是 $KK^* = K^*K$，故 K normal。

X 是非零 entire function，其零点在每个有界集合内有限；因此沿任意无穷零点序列 $|a| \to \infty$。故对任意 $z \notin \{-ia\}$，

$$(K - zI)^{-1} e_{a,j} = \frac{1}{-ia - z} e_{a,j},$$

且对角系数趋于零。有限秩截断因此在算子范数下逼近 $(K - zI)^{-1}$，所以 resolvent compact。compact-resolvent 对角算子的谱仅由上述本征值组成，重数即 $m(a)$。证毕。

图 06-03 | 全坐标 Ren 算子：把每个零点的纵向与横向坐标同时写进谱

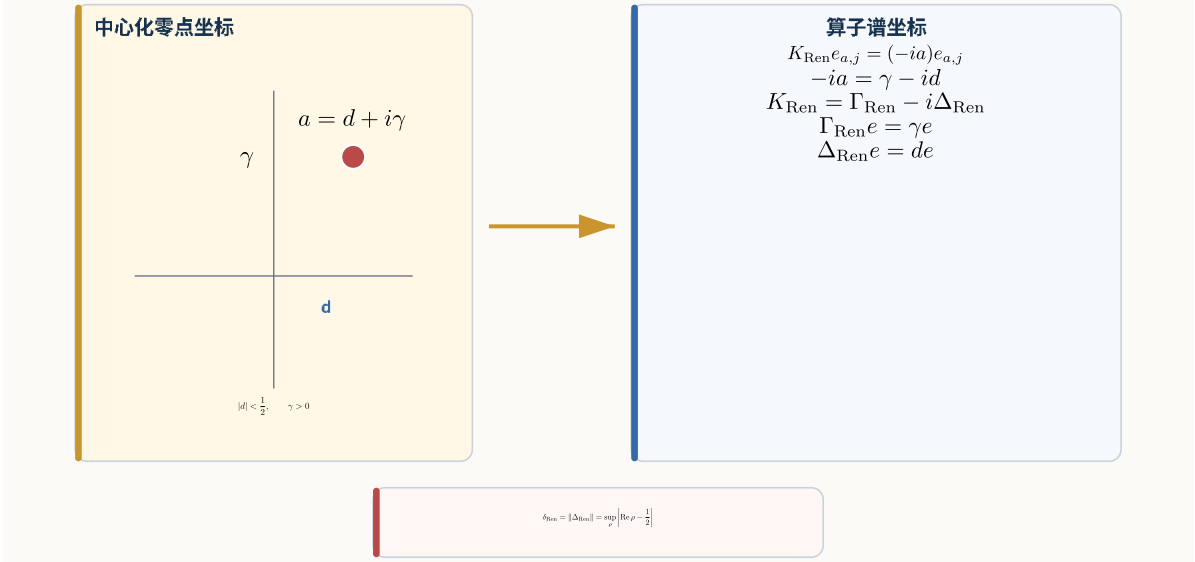


图 06-03　全坐标 Ren 算子。对中心化零点 $a = d + i\gamma$，Ren 算子的本征值是 $-ia = \gamma - id$。因此纵坐标算子 Γ_{Ren} 读取 γ，隐藏横向算子 Δ_{Ren} 读取 d，并有 $K_{\mathrm{Ren}} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} - i\Delta_{\mathrm{Ren}}$。全局量 $\delta_{\mathrm{Ren}} = \| \Delta_{\mathrm{Ren}} \|$ 则把全部横向偏离压缩为一个有界算子不变量。

3.4 隐藏横坐标算子

为避免无界算子和式的定义域歧义，先直接按对角作用定义

$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{Ren}} e_{a,j} = \gamma_a e_{a,j},}$$

其定义域为

$$D(\Gamma_{\mathrm{Ren}}) = \left\{ c : \sum_{a,j} \gamma_a^2 \, |c_{a,j}|^2 < \infty \right\},$$

以及有界算子

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{Ren}} e_{a,j} = d_a e_{a,j}}$$

定义在整个 $\mathcal{H}_{\mathrm{Ren}}$ 上。

由于 $|d_a| < 1/2$，

$$\boxed{\| \Delta_{\mathrm{Ren}} \| = \sup_{a \in \mathcal{Z}_+} |d_a| \le \frac{1}{2}.}$$

又因 d_a 有界，

$$D(\Gamma_{\mathrm{Ren}}) = D(K_{\mathrm{Ren}}).$$

两算子均对角化于同一正交分解，故强交换，并有

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} - i\Delta_{\mathrm{Ren}}, \qquad K_{\mathrm{Ren}}^{*} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} + i\Delta_{\mathrm{Ren}}.}$$

这里 $K - K^{*}$ 在公共定义域上的差等于有界算子 $-2i\Delta$ 的限制，因此其闭包/有界延拓满足

$$\boxed{\| \overline{K_{\mathrm{Ren}} - K_{\mathrm{Ren}}^{*}} \| = 2 \| \Delta_{\mathrm{Ren}} \|.}$$

定义

$$\boxed{\delta_{\mathrm{Ren}} := \| \Delta_{\mathrm{Ren}} \| = \sup_{a \in \mathcal{Z}_+} |d_a|.}$$

则

$$0 \le \delta_{\mathrm{Ren}} \le \frac{1}{2}.$$

而且

$$\sigma(K_{\mathrm{Ren}}) \subset \{\lambda : \Re\lambda > 0,\ |\Im\lambda| < 1/2\}.$$

强交换对 $(\Gamma_{\mathrm{Ren}}, \Delta_{\mathrm{Ren}})$ 的联合点谱为

$$\boxed{\{(\gamma_a, d_a) : a \in \mathcal{Z}_+\}}$$

按解析重数计。因而完整 Ren 对象同时保存纵向纵坐标与历史谱路线通常隐去的横向偏离。

3.5 互反对称算子

由

$$X(a) = 0 \Rightarrow X(-\bar{a}) = 0$$

且解析重数保持不变，映射

$$\iota(a) := -\bar{a}$$

是 $\mathcal{Z}_+$ 上的重数保持对合。

在每个二元轨道 $\{a,\iota(a)\}$ 上选择重数空间之间的一个酉识别；在固定点 $a=\iota(a)$（即 $d_a=0$）上取恒等。由此定义线性酉对合

$$\boxed{J_{\mathrm{Ren}}e_{a,j}=e_{-\bar{a},j}}$$

（基底表达只代表上述酉识别的一个选择）。于是

$$J_{\mathrm{Ren}}^2=I.$$

命题 3.4（互反谱对称）

$$\boxed{J_{\mathrm{Ren}}K_{\mathrm{Ren}}J_{\mathrm{Ren}}=K_{\mathrm{Ren}}^*.}$$

等价地，

$$J_{\mathrm{Ren}}\Gamma_{\mathrm{Ren}}J_{\mathrm{Ren}}=\Gamma_{\mathrm{Ren}},\qquad J_{\mathrm{Ren}}\Delta_{\mathrm{Ren}}J_{\mathrm{Ren}}=-\Delta_{\mathrm{Ren}}.$$

证明

对基向量 $e_{a,j}$，

$$JKJe_{a,j}=JKe_{-\bar{a},j}=J\big(-i(-\bar{a})e_{-\bar{a},j}\big)=i\bar{a}\,e_{a,j}.$$

另一方面

$$K^*e_{a,j}=\overline{-ia}\,e_{a,j}=i\bar{a}\,e_{a,j}.$$

故第一式成立。分解为实部与虚部即得后两式。证毕。

3.6 RH 的算子形式

定理 3.5（RH 与隐藏横向坐标消失的等价性）

下列命题等价：

1. Riemann Hypothesis；
2. 对全部 $a\in\mathcal{Z}_+$，$d_a=0$；
3. $\Delta_{\mathrm{Ren}}=0$；
4. $\delta_{\mathrm{Ren}}=0$；
5. $K_{\mathrm{Ren}}=K_{\mathrm{Ren}}^*$；
6. K_{Ren} 为正自伴算子。

因此

$$\boxed{\mathrm{RH}\Leftrightarrow\Delta_{\mathrm{Ren}}=0\Leftrightarrow\delta_{\mathrm{Ren}}=0\Leftrightarrow K_{\mathrm{Ren}}=K_{\mathrm{Ren}}^*>0.}$$

证明

非平凡零点 $\rho = 1/2 + a$ 满足 RH 当且仅当 $\Re a = d_a = 0$，故 (1) 与 (2) 等价。由 $\Delta e_{a,j} = d_a e_{a,j}$，(2)、(3)、(4) 等价。

又

$$K^* - K = 2i\Delta,$$

故 (3) 与 (5) 等价。当 $d_a = 0$ 时，

$$Ke_{a,j} = \gamma_a e_{a,j}, \qquad \gamma_a > 0.$$

由于零点集合在紧集内有限且实轴上无中心化零点，存在

$$\gamma_* := \inf_{a \in Z_+} \gamma_a > 0.$$

因而

$$K \geq \gamma_* I > 0.$$

故 (2) 推出 (6)；而正算子按定义自伴，故 (6) 推出 (5)。证毕。

RH 成立时记

$$\boxed{H_{\mathrm{Ren}} := K_{\mathrm{Ren}}.}$$

则

$$\sigma(H_{\mathrm{Ren}}) = \{\gamma_n\}, \qquad \mathrm{dimker}(H_{\mathrm{Ren}} - \gamma_n I) = m_n.$$

3.7 Ren 平方逆算子

由引理 3.1，$0 \notin \sigma(K_{\mathrm{Ren}})$。又 K 具有紧预解式，因此 K^{-1} 是有界紧算子。定义

$$\boxed{B_{\mathrm{Ren}} := K_{\mathrm{Ren}}^{-2}.}$$

其本征值为

$$(-ia)^{-2} = -\frac{1}{a^2}.$$

定理 3.6（trace-class 平方逆算子）

$$\boxed{B_{\mathrm{Ren}} \in \mathfrak{S}_1.}$$

特别地，B_{Ren} 是正规 trace-class 算子，且

$$\| B_{\mathrm{Ren}} \|_1 = \sum_{a \in Z_+} \frac{m(a)}{|a|^2} < \infty.$$

证明

Riemann–von Mangoldt 计数给出正纵坐标零点计数

$$N(T) = O(T\log T).$$

又 $|a| \geq \gamma_a$。把 $\gamma_a \geq 1$ 的零点按 dyadic shells $2^k \leq \gamma_a < 2^{k+1}$ 分组，则

$$\sum_{\gamma_a \geq 1} \frac{m(a)}{|a|^2} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{N(2^{k+1})}{2^{2k}} \ll \sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{2^k} < \infty.$$

低高度只有有限多个零点，故总和收敛。对角正规算子的 trace norm 等于本征值绝对值之和，结论成立。证毕。

定理 3.7（RH 与平方逆算子正性的等价性）

$$\boxed{\mathrm{RH} \Leftrightarrow B_{\mathrm{Ren}} \geq 0.}$$

证明

若 RH 成立，$a = i\gamma_a$，故

$$-\frac{1}{a^2} = \frac{1}{\gamma_a^2} > 0,$$

所以 B_{Ren} 为正 trace-class 算子。

反之，若 $B_{\mathrm{Ren}} \geq 0$，则其每个对角本征值 $-1/a^2$ 都是正实数。写 $a = d + i\gamma$，$\gamma > 0$。若 $-1/a^2 \in \mathbb{R}_+$，则 $a^2 \in \mathbb{R}_-$。由

$$a^2 = (d^2 - \gamma^2) + 2id\gamma$$

知 $2d\gamma = 0$，而 $\gamma > 0$，故 $d = 0$。所有中心化零点都在虚轴上，故 RH 成立。证毕。



图 06-04　RH 的算子形式。 定理 3.5 把逐点条件 $d_a = 0$ 等价地写成 $\Delta_{\mathrm{Ren}} = 0$、$\delta_{\mathrm{Ren}} = 0$ 与 $K_{\mathrm{Ren}} = K^{*}_{\mathrm{Ren}} > 0$；定理 3.7 又把同一条件写成 trace-class 平方逆算子 $B_{\mathrm{Ren}} = K^{-2}_{\mathrm{Ren}} \geq 0$。这不是增加新的 RH 条件，而是把同一横向闭合在不同算子层重写。

4. Fredholm 行列式与预解式恢复

本节使用 entire-function canonical product 与 trace-class determinant 理论。

4.1 无条件 Fredholm 行列式恢复

定义

$$G(y) := \frac{X(\sqrt{y})}{X(0)}.$$

由于 X 为偶整函数，右端由 X 的偶次 Taylor 展开唯一给出一个 entire function G，并满足

$$X(w) = X(0)G(w^2).$$

引理 4.1（平方变量 Hadamard 分解）

G 的阶为 $1/2$，零点正是

$$\{a^2 : a \in Z_+\}$$

按重数 $m(a)$ 计，并且

$$\boxed{G(y) = \prod_{a \in Z_+} \left(1 - \frac{y}{a^2}\right)^{m(a)}.}$$

证明

标准 Riemann 完成函数 ξ 为一阶整函数，因此 X 也是阶为 1。由

$$M_G(r) = M_X(\sqrt{r})/|X(0)|$$

可得 G 的阶为 $1/2$。引理 3.1 保证 X 没有实零点，所以每个 $\{a, -a\}$ 轨道恰由唯一 $a \in \mathcal{Z}_+$ 表示。若 a 是 X 的 m 重零点，则由 evenness，$-a$ 也是 m 重零点，局部因子合并成

$$(z-a)^m(z+a)^m = (z^2-a^2)^m,$$

故 a^2 是 G 的 m 重零点。

由定理 3.6，

$$\sum_a \frac{m(a)}{|a^2|} < \infty,$$

故零点 canonical product 的 genus 为零。Hadamard 分解对 order < 1 的 entire function 只允许一个常数指数因子：

$$G(y) = e^c \prod_a \left(1 - \frac{y}{a^2}\right)^{m(a)}.$$

而 $G(0) = 1$，故 $e^c = 1$。证毕。

定理 4.2（无条件 Ren–Fredholm 恒等式）

对所有 $w \in \mathbb{C}$，

$$\boxed{\frac{X(w)}{X(0)} = \det(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}}) = \det(I + w^2 K_{\mathrm{Ren}}^{-2}).}$$

该式不使用 RH。

证明

由定理 3.6，B_{Ren} 为 trace class，故 Fredholm 行列式定义良好且

$$\det(I + yB_{\mathrm{Ren}}) = \prod_{a \in \mathcal{Z}_+} \left(1 + y\left(-\frac{1}{a^2}\right)\right)^{m(a)} = \prod_a \left(1 - \frac{y}{a^2}\right)^{m(a)}.$$

由引理 4.1，该乘积等于 $G(y)$。令 $y = w^2$，并用 $G(w^2) = X(w)/X(0)$，即得结论。证毕。

4.2 预解式迹与对数导数

定理 4.3（预解式迹—对数导数恒等式）

若 $X(w) \neq 0$，则

$$\boxed{\frac{X'(w)}{X(w)} = 2w\mathrm{Tr}[B_{\mathrm{Ren}}(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}})^{-1}].}$$

证明

令

$$D(y) = \det(I + yB_{\mathrm{Ren}}).$$

对 trace-class B，在 $I + yB$ 可逆处 Fredholm 行列式的标准微分公式为

$$\frac{D'(y)}{D(y)} = \mathrm{Tr}(B(I + yB)^{-1}).$$

由定理 4.2，$X(w)/X(0) = D(w^2)$。链式法则给出

$$\frac{X'(w)}{X(w)} = 2w\frac{D'(w^2)}{D(w^2)},$$

代入上式即得。证毕。

因此完整 Ren 对象同时恢复零点除子与完成对象的对数响应。RH 成立时

$$B_{\mathrm{Ren}} = H_{\mathrm{Ren}}^{-2} \geq 0,$$

公式退化为正自伴预解式迹。

图 06-05 | Fredholm 行列式与预解式：从 Ren 算子恢复完成函数响应

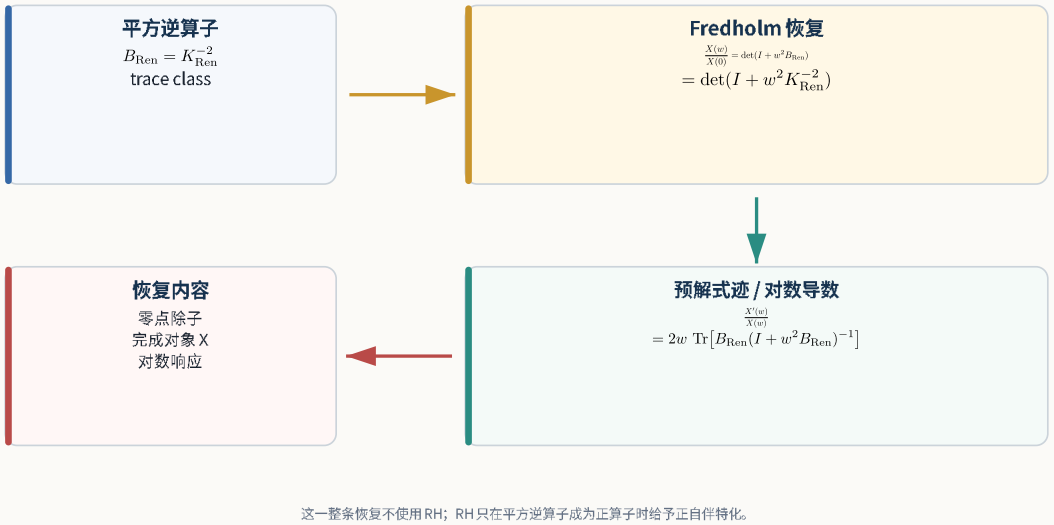


图 06-05　Fredholm 与预解式恢复。无条件 trace-class 算子 $B_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{-2}$ 给出 $\frac{X(w)}{X(0)} = \det(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}})$，再由 Fredholm 行列式的标准微分公式恢复 X'/X。因此 Ren 对象不只保存零点地址，还恢复完成函数及其对数响应；这条恢复链本身不使用 RH。

5. 完整标记 Ren–Riemann 对象与反向恢复

5.1 完整标记 Ren–Riemann 对象

为了避免把可恢复性错误归给“裸谱”，定义：

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} = \left(\mathcal{H}_{\mathrm{Ren}}, K_{\mathrm{Ren}}, J_{\mathrm{Ren}}, c_*, \kappa_*, C_\xi\right),}$$

其中

$$c_* = \frac{1}{2},$$

$$\kappa_* = X(0) = \xi\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$C_\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2).$$

这些标记分别保存：

- 除子 Hilbert 空间与解析重数；
- 完整中心化零点坐标；
- 互反/反射对称；
- 中心锚点；
- Fredholm 归一化；
- 完成化归一化 / Archimedean 标记。

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}} \subset \boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}}$$

表示裸算子与完整标记对象之间的信息层级：后者在算子之外还保存中心锚点、归一化、完成化标记与互反对称。



图 06-06　完整标记 Ren–Riemann 对象。K_{Ren} 保存全坐标零点除子，J_{Ren} 保存互反轨道，c_* 固定中心锚点，$\kappa_* = X(0)$ 固定归一化，C_ξ 保存标准完成化标记。这些数据共同构成 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{full}}_{\mathrm{Ren}}$。遗忘这些标记以后只剩 $\{\gamma_n, m_n\}$，因此“无损恢复”不能错误归给裸谱。

5.2 从完整 Ren 对象恢复 X

由

$$B_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{-2}$$

以及定理 4.2，

$$\boxed{X(w) = \kappa_* \det(I + w^2 K_{\mathrm{Ren}}^{-2}).}$$

因此

$$\boxed{\boldsymbol{R}^{\mathrm{full}}_{\mathrm{Ren}} \Rightarrow X.}$$

这给出从完整标记对象到 X 的精确恢复。

5.3 从 X 恢复 ξ

由中心锚点

$$c_* = \frac{1}{2},$$

有

$$\boxed{\xi(s) = X(s - c_*).}$$

所以

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \Rightarrow \xi.}$$

5.4 从 ξ 恢复全局 ζ

由完成化标记 C_ξ，

$$\boxed{\zeta_{\mathrm{global}}(s) = \frac{\xi(s)}{C_\xi(s)}}$$

以亚纯意义理解。

因此

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \Rightarrow \zeta_{\mathrm{global}}.}$$

5.5 从全局 ζ 回到解析延拓之前

限制给出

$$\boxed{\zeta_{\mathrm{germ}} = \zeta_{\mathrm{global}}|_{\Re s>1}.}$$

所以

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \Rightarrow \zeta_{\mathrm{germ}}.}$$

由此返回 $\Re s > 1$ 上的 Dirichlet / Euler 解析芽。

5.6 从 ζ_{germ} 恢复乘法对数账本

由定理 2.1，在局部有限正测度且具有某个右半平面指数矩的类别中，ζ_{germ} 唯一确定

$$\eta_\times = \sum_{n\geq 1} \delta_{\log n}.$$

令

$$S_\times = \mathrm{supp}\eta_\times.$$

在恢复出的实尺度上定义

$$\mathcal{R}_\times^{\log} = \{(x, y, z) \in S_\times^3 : x + y = z\}.$$

再令

$$\mathbb{N}_\eta := \{e^x : x \in S_\times\}.$$

由于该唯一测度正是 $\sum_n \delta_{\log n}$，有 $\mathbb{N}_\eta = \mathbb{N}$，并且

$$x + y = z \Leftrightarrow e^x e^y = e^z.$$

定理 5.1（乘法身份恢复定理）

从完整标记 Ren–Riemann 对象可以确定恢复带尺度标记的乘法系统：

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \Rightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{R}_\times, \ell), \qquad \ell(n) = \log n.}$$

证明

由定理 4.2 与归一化标记 κ_* 恢复 X；由中心锚点恢复 ξ；由完成化乘子 C_ξ 以亚纯除法恢复 ζ_{global}；限制到 $\Re s > 1$ 得 ζ_{germ}。定理 2.1 唯一恢复 $\eta_\times$，而支撑的加法关系经指数映射恢复 $mq = n$。各步均为确定映射，故结论成立。证毕。

5.7 第二条反向通道：Euler–Möbius–von Mangoldt

从恢复后的 ζ_{germ}，在 $\Re s > 1$ 有

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}.}$$

其倒数展开：

$$\boxed{\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}.}$$

其对数导数：

$$\boxed{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.}$$

Dirichlet 级数唯一性因而恢复：

$$\mu(n), \qquad \Lambda(n).$$

特别地，

$$\Lambda(n) > 0 \Leftrightarrow n = p^k.$$

因此完整 Ren 对象还恢复：

$$\boxed{\text{素数幂来源信息.}}$$

这条通道与对数账本 recovery 相互校验：

$$\boxed{\eta_{\times} \quad \| \quad \text{Euler} \quad \| \quad \mu \quad \| \quad \Lambda.}$$

5.8 从对数账本内部恢复素数生成元

令

$$S_{\times}^{+} = S_{\times} \backslash \{0\},$$

并定义其加法不可分解元素

$$P_{\log} = \left\{ x \in S_{\times}^{+} : \nexists\, y, z \in S_{\times}^{+} \text{ 使} x = y + z \right\}.$$

命题 5.2（由加法不可分解元恢复素数）

$$\boxed{P_{\log} = \{\log p : p \text{素数}\}.}$$

证明

若 $n = ab$ 为合数且 $a, b > 1$，则

$$\log n = \log a + \log b,$$

故 $\log n \notin P_{\log}$。反之，若 p 为素数且

$$\log p = \log a + \log b$$

其中 $a, b > 1$ 为整数，则指数化得 $p = ab$，矛盾。故 $\log p \in P_{\log}$。证毕。

所以 $\eta_{\times}$ 不仅恢复乘法关系，也在其内部恢复素数生成元与唯一素数-exponent 坐标 s。该通道与 von Mangoldt 通道给出同一素数生成结构的两种恢复方式。

6. 正向生成、反向恢复与无损桥梁

6.1 正向链：从乘法身份到 Ren 对象

从

$$\mathfrak{M}_{\times} = (\mathbb{N}, \mathcal{R}_{\times}, \ell)$$

构造

$$\eta_{\times} = \sum_{n} \delta_{\ell(n)}.$$

然后

$$\eta_{\times} \to \zeta_{\text{germ}}$$

经 Laplace 变换；

$$\zeta_{\mathrm{germ}} \to \zeta_{\mathrm{global}}$$

经唯一亚纯延拓；

$$\zeta_{\mathrm{global}} \to \xi$$

经 registered completion；

$$\xi \to X$$

经中心化 ing；

$$X \to \mathcal{Z}_{+} \to K_{\mathrm{Ren}}, J_{\mathrm{Ren}}$$

经零点除子构造。

因此

$$\boxed{\mathfrak{M}_{\times} \Rightarrow \boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}.}$$

6.2 反向链：从 Ren 对象回到乘法身份

由第五节：

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \Rightarrow X \Rightarrow \xi \Rightarrow \zeta_{\mathrm{global}} \Rightarrow \zeta_{\mathrm{germ}} \Rightarrow \eta_{\times} \Rightarrow \mathfrak{M}_{\times}.}$$

6.3 乘法—解析—谱无损桥梁

定理 6.1（标准 Riemann 规范下的双向可恢复性）

固定标准 Riemann 规范：

1. 标准正整数及实数结构；
2. 尺度标记

$$\ell(n) = \log n;$$

3. 中心锚点

$$c_{*} = \frac{1}{2};$$

4. standard 完成化乘子 C_{ξ}；
5. 归一化

$$\kappa_{*} = \xi(1/2).$$

解析延拓的存在与唯一性使用标准复分析唯一性。

则存在确定的正向链

$$\boxed{\mathfrak{M}_{\times} \to \zeta_{\mathrm{germ}} \to \zeta_{\mathrm{global}} \to \xi \to X \to \boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}}$$

与确定的反向链

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \to X \to \xi \to \zeta_{\mathrm{global}} \to \zeta_{\mathrm{germ}} \to \mathfrak{M}_{\times}.}$$

正向后再反向恢复原始 $\mathfrak{M}_{\times}$。反向后再正向恢复同一中心化零点除子、同一标量标记，并得到与原对象标记酉等价的 Ren 结构化谱对象。

证明

正向链：由 $\mathfrak{M}_{\times}$ 的尺度标记构造

$$\eta_{\times} = \sum_{n} \delta_{\log n},$$

其 Laplace 变换给 ζ_{germ}；标准唯一亚纯延拓给 ζ_{global}；乘以 C_{ξ} 得 ξ；平移 c_{*} 得 X；由上半平面零点除子及其重数构造 K 与互反对合 J，并连同 $c_{*}, \kappa_{*}, C_{\xi}$ 得 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}$。

反向链正是定理 5.1。故正向再反向恢复 $\eta_{\times}$，继而恢复相同的带尺度标记的乘法系统。

反向再正向时，定理 4.2 恢复同一 X，故恢复同一中心化零点除子与重数。由对角正规算子的谱分类，所得 K 与原 K 酉等价。对每个非固定互反轨道，两个允许的酉配对可通过在两重数空间上作分块对角酉算子互相共轭；固定轨道上规范取 $J = I$。因此连同标量标记，两个完整对象标记酉等价。证毕。

术语说明

上述双向可恢复性称为

$$\boxed{\textbf{乘法—解析—谱无损桥梁.}}$$

“无损”专指标准 Riemann 规范下的信息双向可恢复性；不同数学类型保持各自对象身份，裸谱与完整标记对象保持层级区分。



图 06-07　乘法—解析—谱无损桥梁。 正向链从乘法身份，经对数账本、Dirichlet germ、唯一亚纯延拓、完成化与中心化到达完整 Ren 对象；反向链利用 Fredholm、完成化标记和 Dirichlet/Laplace 唯一性逐层恢复到原乘法身份。

所谓“无损”，指这两个完整对象层之间的双向可恢复性，而不是说任何中间投影都单独包含全部信息。

6.4 “无损”的对象含义

“无损”指规范信息在不同对象类型之间可双向恢复。

它表示存在明确恢复映射：

$$\text{生成源} \to \text{解析芽} \to \text{全局解析对象} \to \text{完成对象} \to \text{谱对象},$$

且在给定规范下存在反向读回：

$$\text{谱对象} \to \text{完成对象} \to \text{全局解析对象} \to \text{解析芽} \to \text{生成源}.$$

由此：

> 可逆的是规范信息， 不同数学类型保持各自对象身份。

6.5 规范唯一性

定义两个完整 Ren 对象标记酉等价，如果存在酉

$$U: \mathcal{H}^{(1)}_{\mathrm{Ren}} \to \mathcal{H}^{(2)}_{\mathrm{Ren}}$$

使

$$UK^{(1)}_{\mathrm{Ren}}U^{-1} = K^{(2)}_{\mathrm{Ren}}, \qquad UJ^{(1)}_{\mathrm{Ren}}U^{-1} = J^{(2)}_{\mathrm{Ren}},$$

且标量标记 c_*, κ_*, C_ξ 一致。

定理 6.2（标记酉唯一性）

由同一 X 按本章定义 9–12 构造的两个完整 Ren 对象标记酉等价。

证明

两个构造具有同一中心化零点除子及相同解析重数，因此其 K 都是具有相同纯点谱及相同本征空间重数的正规对角算子。逐本征空间选择酉即得

$$UK^{(1)}U^{-1} = K^{(2)}.$$

还需同时交织 J。对互反对合的每个二元轨道 $\{a, -\bar{a}\}$，J 只是两个等维重数空间之间的酉识别与其逆。给定两个选择 V_1, V_2，可固定一侧酉为恒等，另一侧取 $V_2 V_1^{-1}$，从而使两 J 共轭。对固定轨道 $a = -\bar{a}$，本章规范规定 $J = I$，无额外自由度。把各轨道酉直和起来即得同时交织 K, J 的全局酉。标量标记本来相同，故结论成立。证毕。

记该标记酉等价 class 为

$$\boxed{\mathfrak{R}_{\mathrm{Ren}\cdot}^{\mathrm{full}}}$$

7. RH 特化、裸谱读出与全书接口

RH 成立以后，完整 Ren 对象具有正自伴特化，并与后续谱见证、GUE 二阶关系及第九章的独立 Hilbert–Pólya 路线形成不同层级的接口。

7.1 Ren–Riemann 谱类

由

$$K_{\mathrm{Ren}} = H_{\mathrm{Ren}} > 0$$

定义

$$\boxed{\mathfrak{R}_{\mathrm{Ren}} := [H_{\mathrm{Ren}}]_{\mathrm{u}\cdot}}$$

这是完整标记酉等价类

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}$$

的下游谱读数。前者主要保存本征值与解析重数；后者还保留中心锚点、完成化标记、互反对称和乘法—解析恢复结构。

7.2 裸谱遗忘映射

定义遗忘映射

$$\boxed{\mathcal{F}_{\text{裸}}:\mathfrak{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}\to[H_{\mathrm{Ren}}]_{\mathrm{u}},}$$

它在 RH 成立后遗忘完成化标记、中心锚点和恢复结构，只保留

$$\{\gamma_n,m_n\}.$$

进一步定义

$$\boxed{D_{\mathrm{Ren}}=H_{\mathrm{Ren}}\oplus(-H_{\mathrm{Ren}}),}$$

则

$$\sigma(D_{\mathrm{Ren}})=\{\pm\gamma_n\}$$

并按解析重数计。该双边谱是第八章二阶自身关系的直接输入。

7.3 与第七章谱见证的接口

本章给出的规范谱终端为

$$H_{\mathrm{Ren}},\qquad \mathfrak{R}_{\mathrm{Ren}}.$$

第七章以这一对象为规范谱接口，并进一步建立

$$F_{\mathrm{R}}\Leftrightarrow\nu_{\mathrm{R}}\Leftrightarrow(H_{\mathrm{id}},M_{\mathrm{mult}})\Leftrightarrow H_{\mathrm{Ren}}$$

的 Riemann 谱身份见证结构。

7.4 与第九章独立 Hilbert–Pólya 路线的关系

本章与第九章具有相反的生成方向。

本章从完成零点除子进入规范谱：

$$\boxed{\text{Riemann 完成零点除子}\to\text{规范谱实现}\leftrightarrow\text{乘法—解析恢复.}}\tag{7.1}$$

第九章从乘法生成源独立进入自伴谱：

$$\boxed{\text{乘法生成源}\to\text{正自伴谱}\to\text{规范终端相认.}}\tag{7.2}$$

因此，本章给出闭合零点到规范谱的无损实现；第九章给出从生成源出发的独立 Hilbert–Pólya 构造。

7.5 完整 Ren 对象相对于裸对角谱的附加结构

仅取

$$He_n=\gamma_n e_n$$

时，所得对象保存纵向本征值及其重数。完整 Ren 对象还保留

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} - i\Delta_{\mathrm{Ren}},}$$

从而记录 RH 前的横向坐标；保留

$$\boxed{J_{\mathrm{Ren}} K_{\mathrm{Ren}} J_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{*},}$$

从而记录互反对称；并通过

$$\boxed{B_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{-2}}$$

得到

$$\boxed{X(w) = X(0)\det(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}}),}$$

进而恢复完成解析对象。再经完成化逆读、限制以及 Laplace / Dirichlet 唯一性，返回

$$\boxed{\mathcal{R}_{\times}.}$$

因此，完整 Ren–Riemann 对象是能够在乘法身份、解析延拓与谱之间双向读写的规范结构化谱对象。

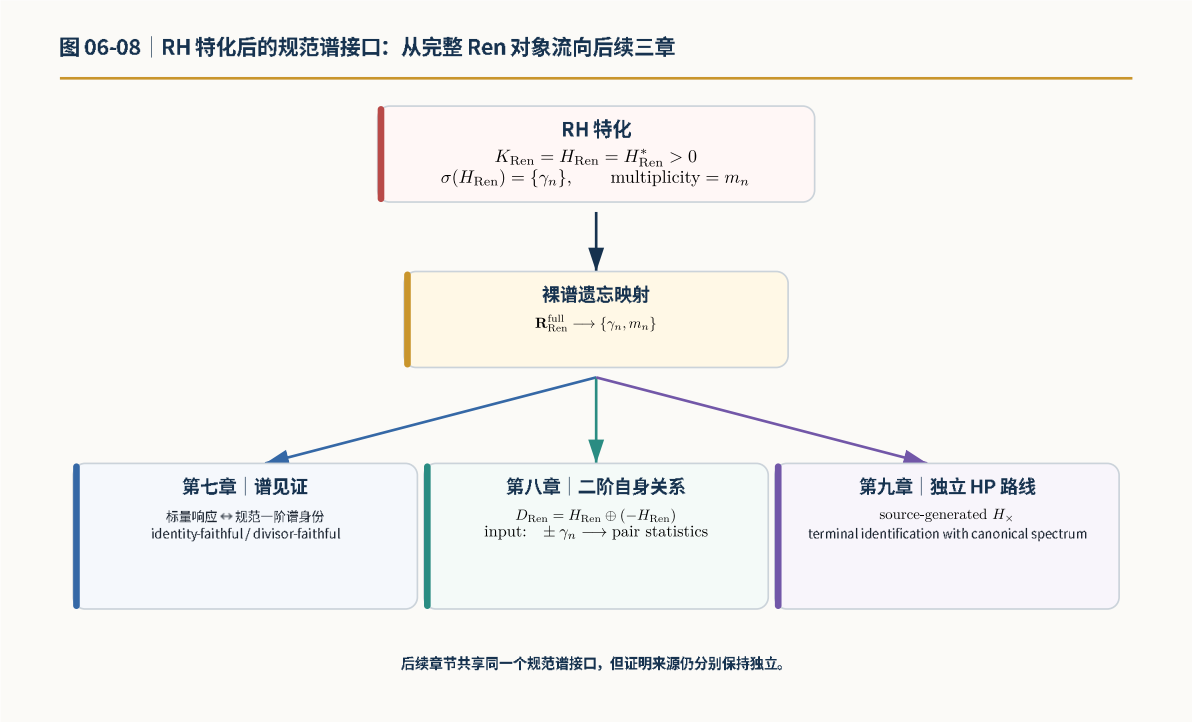


图 06-08　RH 特化后的规范谱接口。 RH 成立后，K_{Ren} 特化为正自伴 H_{Ren}，裸谱遗忘映射只保留 $\{\gamma_n, m_n\}$。第七章从标量谱见证重新识别这一规范一阶谱，第八章使用双边算子 $D_{\mathrm{Ren}} = H_{\mathrm{Ren}} \oplus (-H_{\mathrm{Ren}})$ 进入二阶自身关系，第九章则从独立乘法源生成的 Hilbert–Pólya 路线在终端与规范谱相认。三条下游接口共享同一规范谱对象，但证明来源仍保持独立。

8. 算子读出与直接推论

以下各节记录由本章算子结构直接得到的谱读出。

8.1 零点几何、解析重数与二阶谱统计的共同底座

RH 后，

$$H_{\mathrm{Ren}}$$

统一保存

$$\{\gamma_n, m_n\}.$$

因此零点计数可以写成

$$\boxed{N(T) = \mathrm{Tr}\mathbf{1}_{(0,T]}(H_{\mathrm{Ren}}),}$$

解析重数写成

$$\boxed{m_n = \mathrm{dimker}(H_{\mathrm{Ren}} - \gamma_n I).}$$

这与第三章的解析重数算子

$$\boxed{M_{\mathrm{mult}} e_n = m_n e_n}$$

记录同一组 m_n 数据：第三章把解析重数作为独立对角标记保存，本章把它实现为 H_{Ren} 的本征空间维数。

按 γ_n 排序后，第二章的相邻间隔直接读为

$$\boxed{\Delta_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n.}$$

带符号版本

$$D_{\mathrm{Ren}} = H_{\mathrm{Ren}} \oplus (-H_{\mathrm{Ren}})$$

则提供第八章二阶谱统计所需的双边谱输入。

因此第二章的零点间隔、第三章的解析重数以及第八章的二阶谱统计共享同一规范谱底座。

8.2 横向偏离的全局算子表达

完整 Ren 算子给出

$$K_{\mathrm{Ren}} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} - i\Delta_{\mathrm{Ren}}.$$

因此

$$\boxed{\delta_{\mathrm{Ren}} = \| \Delta_{\mathrm{Ren}} \| = \sup_{\rho} \left| \Re\rho - \frac{1}{2} \right|}$$

把逐点横坐标偏离压缩成一个全局有界算子不变量。

同时

$$\boxed{\mathrm{RH} \Leftrightarrow \delta_{\mathrm{Ren}} = 0 \Leftrightarrow K_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{*}.}$$

因此零点横向偏离具有统一的算子论表达：

$$\boxed{\text{horizontal zero defect} \leftrightarrow \text{自伴 ness defect.}}$$

这一等价式把零点横向偏离压缩为全局自伴性缺陷。

8.3 零点—解析—乘法三侧的一致性

由

$$B_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{-2}$$

可恢复

$$\frac{X(w)}{X(0)} = \det(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}}),$$

以及

$$\frac{X'(w)}{X(w)} = 2w\mathrm{Tr}[B_{\mathrm{Ren}}(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}})^{-1}].$$

另一方面，

$$X \to \xi \to \zeta_{\mathrm{global}} \to \zeta_{\mathrm{germ}}$$

又回到

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}, \qquad \Re s > 1,$$

以及

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

因此本章提供一套三侧一致性结构：

$$\boxed{\text{零点除子} \leftrightarrow \text{Fredholm/resolvent response} \leftrightarrow \text{Euler/Dirichlet 乘法生成源.}}$$

三侧表达通过同一个完整 Ren 对象相互校验，并读取同一 Riemann 对象的不同信息层。

8.4 有限谱截断与可计算读出

现实计算只能使用有限个零点。定义前 N 个谱点对应的有限秩截断

$$H_{\mathrm{Ren},N}, \qquad B_{\mathrm{Ren},N} = H_{\mathrm{Ren},N}^{-2}.$$

可以计算

$$\boxed{D_N(w) = \det(I + w^2 B_{\mathrm{Ren},N})}$$

近似

$$\frac{X(w)}{X(0)},$$

以及

$$\boxed{R_N(w) = 2w\mathrm{Tr}\left[B_{\mathrm{Ren},N}(I + w^2 B_{\mathrm{Ren},N})^{-1}\right]}$$

近似

$$\frac{X'(w)}{X(w)}.$$

有限截断本身具有严格定义。相应的误差由尾部 trace-class 和控制。

其可计算读出为：

$$\boxed{\text{有限谱截断} \to \text{完成解析对象的有限精度读出.}}$$

这给出从有限零点数据到完成解析对象的谱逼近框架。

8.5 本章算子层的结构位置

完整 Ren 对象同时支持以下读出：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{闭合零点纵向谱与解析重数}\\ \Downarrow\\ \text{全局横向偏离算子}\\ \Downarrow\\ \text{Fredholm / resolvent 解析恢复}\\ \Downarrow\\ \text{乘法—解析—谱双向可恢复性}\\ \Downarrow\\ \text{有限谱截断读出.}\end{array}} \tag{8.1}$$

由此，第六章完成从闭合零点除子到规范谱对象的构造；第七章继续处理谱身份见证，第八章进入二阶统计结构，第九章则从乘法生成源独立建立另一条自伴谱路线。

9. 结构总结与结论

9.1 核心结构

本章的结构由三组关系概括。

第一，

$$\boxed{\mathrm{RH} \Leftrightarrow \Delta_{\mathrm{Ren}} = 0 \Leftrightarrow K_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{*} > 0.}$$

第二，

$$\boxed{\mathfrak{M}_{\times} \leftrightarrow \boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}.}$$

第三，

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \supset K_{\mathrm{Ren}} \overset{\mathrm{RH}}{\rightarrow} H_{\mathrm{Ren}} \rightarrow D_{\mathrm{Ren}}.}$$

第一式记录 RH 的横向算子条件；第二式记录乘法—解析—谱双向可恢复性；第三式记录从完整标记对象到下游谱读数的信息层级。

9.2 定理与接口范围

本章建立的主要结果与全书接口如下：

对象或结论	数学内容	全书位置
K_{Ren}	由中心化零点除子定义的闭正规算子	第六章核心对象
$K_{\mathrm{Ren}} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} - i\Delta_{\mathrm{Ren}}$	纵向坐标与横向偏离的强交换分解	与第五章坐标谱图一致
$\delta_{\mathrm{Ren}} = \Vert\, \Delta_{\mathrm{Ren}} \,\Vert$	全局横向偏离	RH 当且仅当 $\delta_{\mathrm{Ren}} = 0$
$J_{\mathrm{Ren}} K_{\mathrm{Ren}} J_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{*}$	互反对称的算子表示	对应第一、四章互反角色结构
$B_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{-2} \in \mathfrak{S}_1$	trace-class 平方逆算子	Fredholm / 预解式恢复基础
$X(w)/X(0) = \det(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}})$	完成整函数的 Fredholm 恢复	解析—谱接口
$\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \rightarrow X \rightarrow \xi \rightarrow \zeta_{\mathrm{global}}$	完成解析对象恢复	完整标记对象
$\zeta_{\mathrm{germ}} \rightarrow \eta_{\times} \rightarrow \mathcal{R}_{\times}$	解析延拓前乘法结构恢复	乘法—解析接口
双向无损桥	标准 Riemann 规范下的双向可恢复性	第六章主定理
H_{Ren}	RH 后的规范正自伴算子	第七、八章的谱接口
$D_{\mathrm{Ren}} = H_{\mathrm{Ren}} \oplus (-H_{\mathrm{Ren}})$	双边裸谱读出	第八章二阶统计接口
$\mathfrak{M}_{\times} \rightarrow \boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}$	从带尺度乘法实现到 Ren 对象	与第九章的独立源生成路线保持方向区分

第九章的 source-generated Hilbert–Pólya 构造从乘法生成源独立建立自伴谱；本章则从 Riemann 完成零点除子建立全坐标规范谱对象。两条路线在全书中承担不同证明方向。

9.3 结论

任毅飞算子（Yifei Ren operator，简称 Ren operator）由中心化零点除子在 RH 之前定义：

$$\boxed{K_{\mathrm{Ren}} = \Gamma_{\mathrm{Ren}} - i\Delta_{\mathrm{Ren}}.}$$

它同时保存零点纵坐标与相对临界线的横向偏离，并把 RH 写成

$$\boxed{\mathrm{RH} \Leftrightarrow \Delta_{\mathrm{Ren}} = 0.}$$

平方逆算子

$$B_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}^{-2}$$

属于 trace class，并通过 Fredholm 行列式恢复归一化 Riemann 完成函数：

$$\boxed{\frac{X(w)}{X(0)} = \det(I + w^2 B_{\mathrm{Ren}}).}$$

加入中心锚点、归一化、完成化乘子和互反对称以后，完整标记对象

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}$$

能够反向恢复

$$X \to \xi \to \zeta_{\mathrm{global}} \to \zeta_{\mathrm{germ}} \to \eta_{\times} \to \mathcal{R}_{\times}.$$

因此

$$\boxed{\mathfrak{M}_{\times} \leftrightarrow \boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}}$$

表示标准 Riemann 规范下的双向信息可恢复性。不同数学类型保持各自对象身份，而乘法—解析—谱信息可以沿确定映射正向生成并反向恢复。

RH 成立后，

$$\boxed{H_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}|_{\mathrm{RH}}}$$

成为规范 Riemann 谱算子；其带符号版本

$$D_{\mathrm{Ren}} = H_{\mathrm{Ren}} \oplus (-H_{\mathrm{Ren}})$$

进入第八章的二阶谱统计。第七章进一步建立其 Riemann 谱身份见证；第九章则从乘法生成源独立构造 source-generated Hilbert–Pólya 谱路线。

由此，第六章完成从闭合零点除子到全坐标规范谱对象、再到乘法—解析履历反向恢复的完整算子链。

附录 A｜核心符号

符号	含义

符号	含义
$\mathfrak{I}_{\times}=(\mathbb{N}_{>0},\mu)$	第一章冻结的根乘法身份
$\mathcal{R}_{\times}$	整数乘法关系 $mq=n$
$\ell(n)=\log n$	规范乘法尺度
$\mathfrak{M}_{\times}=(\mathbb{N},\mathcal{R}_{\times},\ell)$	根乘法身份的带尺度关系实现
$\eta_{\times}$	乘法对数账本 $\sum_n \delta_{\log n}$
H_{mult}	解析延拓前乘法源算子，$H_{\mathrm{mult}}e_n=\log n\, e_n$
ζ_{germ}	$\Re s>1$ 上的 Euler / Dirichlet 解析芽
ζ_{global}	标准亚纯延拓
$C_{\xi}(s)$	Riemann 完成化乘子
$X(z)$	$\xi(1/2+z)$
$a_{\rho}=d_{\rho}+i\gamma_{\rho}$	中心化零点坐标
$\mathcal{Z}_{+}$	上半平面中心化零点支撑
K_{Ren}	任毅飞算子；无条件全坐标 Ren 算子
Γ_{Ren}	纵坐标算子
Δ_{Ren}	隐藏横向偏离算子
$\delta_{\mathrm{Ren}}=\Vert\,\Delta_{\mathrm{Ren}}\,\Vert$	全局横向缺陷
J_{Ren}	互反对称酉对合
$B_{\mathrm{Ren}}=K_{\mathrm{Ren}}^{-2}$	Ren 平方逆算子
$\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}$	完整标记 Ren–Riemann 谱对象
H_{Ren}	RH 后规范 Riemann 谱算子
$\mathfrak{R}_{\mathrm{Ren}}=[H_{\mathrm{Ren}}]_{\mathrm{u}}$	Ren–Riemann 谱类
D_{Ren}	带符号规范 Riemann 谱算子

附录 B｜依赖图

$$\mathfrak{I}_{\times}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathfrak{M}_{\times}=(\mathbb{N},\mathcal{R}_{\times},\log)$$
$$\Updownarrow$$
$$\eta_{\times}=\sum_{n}\delta_{\log n}$$
$$\Updownarrow_{\mathrm{Laplace/Dirichlet}}$$
$$\zeta_{\mathrm{germ}}\quad(\Re s>1)$$
$$\Updownarrow_{\text{解析延拓/限制}}$$
$$\zeta_{\mathrm{global}}$$
$$\Updownarrow_{\mathrm{completion/recovery}}$$
$$\xi$$
$$\Updownarrow_{\text{中心化}}$$
$$X$$
$$\Updownarrow_{\mathrm{divisor/Fredholm}}$$
$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}$$
$$\Downarrow_{\mathrm{RH}}$$
$$H_{\mathrm{Ren}}=H_{\mathrm{Ren}}^{*}>0$$
$$\Downarrow_{\mathcal{F}_{\text{裸}}}$$
$$\{\gamma_n,m_n\}$$
$$\Downarrow$$

第七章谱见证　与　第八章 GUE 二阶结构.

附录 C｜与第九章独立 Hilbert–Pólya 路线的关系

本章的方向为

$$\boxed{\text{Riemann 完成零点除子} \to \text{Ren 规范谱} \leftrightarrow \text{乘法—解析恢复.}}$$

第九章的方向为

$$\boxed{\text{乘法生成源} \to \text{source-generated 正自伴谱} \to \text{规范终端相认.}}$$

两章共享根乘法身份与规范谱接口，但证明方向不同：第六章从完成零点数据建立全坐标谱对象，第九章从生成源独立建立自伴谱路线。

附录 D｜术语与对象层级

全书采用以下名称：

$$\boxed{\text{任毅飞算子} = \text{Yifei Ren operator}}$$

用于 K_{Ren}；

$$\boxed{\text{完整标记 Ren–Riemann 谱对象}}$$

用于 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}$；

$$\boxed{\text{规范 Riemann 谱算子}}$$

用于 RH 后的 H_{Ren}；

$$\boxed{\text{带符号规范 Riemann 谱算子}}$$

用于 D_{Ren}。

对象层级为

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \supset K_{\mathrm{Ren}} \overset{\mathrm{RH}}{\to} H_{\mathrm{Ren}} \to D_{\mathrm{Ren}}.}$$

其中 K_{Ren} 保存完整中心化零点坐标，H_{Ren} 是 RH 后的正自伴特化，D_{Ren} 提供双边裸谱读出。

第七章　Riemann 谱见证定理：任毅飞规范谱见证的唯一性与 Hilbert–Pólya 身份传递

摘要

第六章构造了完整标记 Ren–Riemann 谱对象及其 RH 后的规范自伴算子 H_{Ren}。本章进一步从这一规范对象中提取足以唯一确定 Riemann 谱身份的标量见证，并建立其唯一性与谱身份传递。

令

$$X(z)=\xi\left(\frac{1}{2}+z\right),\qquad G(y)=\frac{X(\sqrt{y})}{X(0)},\qquad F_{\mathrm{R}}(y)=\frac{G'(y)}{G(y)}.$$

在 RH 成立时，设不同正零点纵坐标为

$$0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots$$

且解析重数为 m_n。则

$$F_{\mathrm{R}}(y)=\sum_{n\geq 1}\frac{m_n}{y+\gamma_n^2}=\int_{[0,\infty)}\frac{d\nu_{\mathrm{R}}(\beta)}{1+y\beta},$$

其中

$$\boxed{\nu_{\mathrm{R}}=\sum_{n\geq 1}m_n\,\beta_n\delta_{\beta_n},\qquad \beta_n=\gamma_n^{-2}.}$$

标量响应 F_{R}、等价的 Stieltjes 测度 ν_{R} 以及由它们唯一恢复的规范谱数据共同构成 **Riemann 规范谱见证**。其完整确定链为

$$\boxed{F_{\mathrm{R}}\Leftrightarrow\nu_{\mathrm{R}}\Leftrightarrow(H_{\mathrm{id}},M_{\mathrm{mult}})\Leftrightarrow H_{\mathrm{Ren}},}$$

其中

$$H_{\mathrm{id}}e_n=\gamma_n e_n,\qquad M_{\mathrm{mult}}e_n=m_n e_n,$$

而

$$H_{\mathrm{Ren}}=\oplus_n\gamma_n I_{m_n}.$$

在 $y=0$ 的解析邻域，

$$F_{\mathrm{R}}(y)=\sum_{k\geq 0}(-1)^k\mu_k^{\mathrm{R}}y^k,\qquad \mu_k^{\mathrm{R}}=\sum_n m_n\,\gamma_n^{-2k-2}.$$

由于 ν_{R} 是紧支撑有限正测度，全阶矩序列唯一决定 ν_{R}。因此完整局部解析芽、全阶矩序列、Stieltjes 测度与规范谱身份相互唯一确定。

若 $B_\times \geq 0$ 为有界自伴算子，$\Psi_\times$ 为循环向量，并且

$$F_\times(y) = \langle (I + yB_\times)^{-1}\Psi_\times, \Psi_\times \rangle$$

与 F_{R} 在某非空开区间一致，或具有相同的全阶矩，则循环谱定理给出带基点的酉等价

$$\boxed{(B_\times, \Psi_\times) \simeq (B_{\mathrm{R}}, \mathbf{1}).}$$

从而

$$H_\times := B_\times^{-1/2} \simeq H_{\mathrm{id}},$$

并由同一见证测度恢复解析重数，得到

$$\boxed{\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_\times) \simeq H_{\mathrm{Ren}}.}$$

因此，本章完成谱身份见证与相认：一个独立构造出的循环自伴谱对象，一旦具有与 Riemann 规范见证相同的完整标量响应、全阶矩或局部解析芽，其谱身份即被唯一确定。第九章的独立 Hilbert–Pólya 路线负责从乘法生成源构造自伴谱；本章提供其终端规范相认接口。

1. 生成层与见证层

Hilbert–Pólya 结构包含两个不同的数学层级。

第一层是生成层：

$$\boxed{\mathcal{S}_\times \to H_\times = H_\times^*.} \tag{1.1}$$

第二层是谱身份见证层：

$$\boxed{H_\times \to \text{Riemann 规范谱身份相认.}} \tag{1.2}$$

第九章负责前一方向的独立源生成（source-generated）Hilbert–Pólya 构造；本章负责后一方向的规范相认。

对于循环自伴实现，一个标量预解式矩阵元已经编码其循环谱测度。因此谱身份相认可在对象层写成

$$\boxed{\text{相同循环响应} \Rightarrow \text{相同谱测度} \Rightarrow \text{相同循环谱对象.}} \tag{1.3}$$

这种相认不依赖预先选择相同的本征值编号。后续各节依次建立标量响应、Stieltjes 测度、全阶矩、局部解析芽以及循环谱实现之间的唯一确定关系。

2. 从完整 Ren–Riemann 对象提取规范谱见证

完整标记 Ren–Riemann 谱对象记为

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}.$$

它除零点谱外，还保存中心化坐标、完成化乘子 C_ξ、归一化、互反对称以及从谱端返回 Riemann 完成函数和解析延拓前乘法身份的恢复结构。

在 RH 成立时，其全坐标正规算子特化为正自伴算子

$$H_{\mathrm{Ren}},$$

且

$$H_{\mathrm{Ren}} = \oplus_n \gamma_n I_{m_n}.$$

因此

$$\dim\ker(H_{\mathrm{Ren}} - \gamma_n I) = m_n.$$

终端身份相认所需的信息可以由完整对象压缩为一个标量规范见证。

本章从完整对象中提取足以唯一确定 Riemann 谱身份的**规范谱见证**，并建立其循环谱实现的唯一性。

因此本章承担的映射是：

$$\boxed{\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} \to \mathfrak{W}_{\mathrm{R}}}$$

以及

$$\boxed{\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} \Rightarrow \text{unique Riemann 谱实现.}}$$

任意独立 Hilbert–Pólya 构造都可以在终端通过这一规范见证与 Riemann 谱身份相认，而其生成链保持独立。

3. Riemann 规范谱见证

3.1 标量响应

定义

$$X(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + z\right),$$

以及

$$G(y) = \frac{X(\sqrt{y})}{X(0)}.$$

由于 X 为 even entire function，G 是 entire function。

定义对数响应

$$\boxed{F_{\mathrm{R}}(y) = \frac{G'(y)}{G(y)}.}$$

在 RH 下，

$$\frac{X(z)}{X(0)} = \prod_n \left(1 + \frac{z^2}{\gamma_n^2}\right)^{m_n},$$

所以

$$\boxed{F_{\mathrm{R}}(y) = \sum_n \frac{m_n}{y + \gamma_n^2}.}$$

令

$$\beta_n = \gamma_n^{-2},$$

则

$$F_{\mathrm{R}}(y) = \sum_n \frac{m_n \beta_n}{1 + y\beta_n}.$$

3.2 Stieltjes 见证测度

定义

$$\boxed{\nu_{\mathrm{R}} = \sum_n m_n \, \beta_n \delta_{\beta_n}.}$$

由

$$\sum_n m_n \, \gamma_n^{-2} < \infty$$

知 ν_{R} 是有限正测度。

并且

$$\boxed{F_{\mathrm{R}}(y) = \int_{[0,\infty)} \frac{d\nu_{\mathrm{R}}(\beta)}{1 + y\beta}.}$$

其支撑包含

$$\beta_n \in (0, \beta_1],$$

并以 0 为唯一可能的有限聚点，因此

$$\mathrm{supp}\nu_{\mathrm{R}} \subset [0, \beta_1].$$

注意：

$$\nu_{\mathrm{R}}(\{0\}) = 0.$$

3.3 规范见证的定义

定义

$$\boxed{\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} := F_{\mathrm{R}},}$$

并把其唯一 Stieltjes 表示测度 ν_{R} 视为等价的测度表示。

因此：

$$\boxed{\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} \equiv F_{\mathrm{R}} \equiv \nu_{\mathrm{R}}}$$

这里“≡”只表示在声明的 Stieltjes class 中相互唯一确定，不表示函数与测度属于同一数学类型。

本章称 $\mathfrak{W}_{\mathrm{R}}$ 为：

$$\boxed{\textbf{Riemann 规范谱见证.}}$$

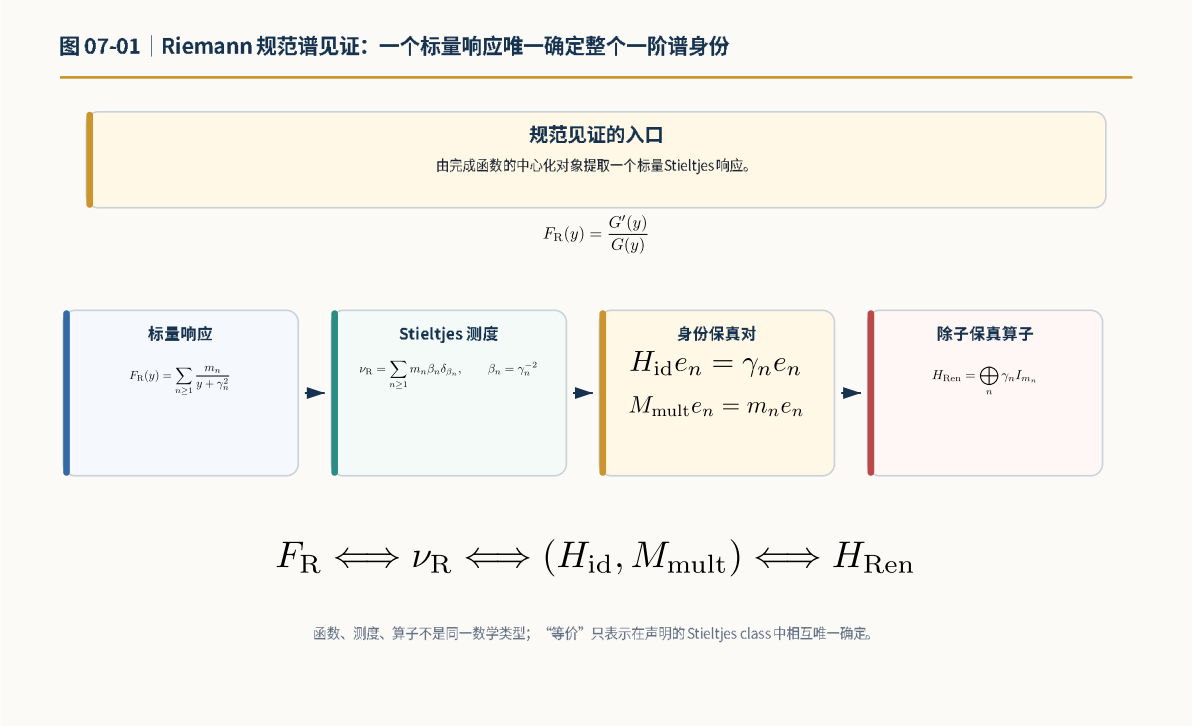


图 07-01　Riemann 规范谱见证。 在 RH 后，标量响应 F_{R}、其唯一 Stieltjes 表示测度 ν_{R}、身份保真对 $(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$ 与除子保真算子 H_{Ren} 相互唯一确定。这里的“等价”是对象间的唯一可恢复关系，而不是把函数、测度与算子混成同一数学类型。

4. 标量完备谱见证定理

定理 4.1

在 RH 下，Riemann 规范谱见证 F_{R} 唯一确定：

1. Stieltjes 测度 ν_{R}；

2. 不同谱身份地址 $\{\gamma_n\}$；
3. 解析重数 $\{m_n\}$；
4. 身份保真对 $(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$ 的酉等价类；
5. 除子保真的规范算子 H_{Ren} 的酉等价类。

因此

$$\boxed{F_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \nu_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \Leftrightarrow H_{\mathrm{Ren}}.}$$

证明

由 Stieltjes transform uniqueness，F_{R} 唯一决定 ν_{R}。

定义正原子支撑

$$\mathrm{AtSupp}_+(\nu_{\mathrm{R}}) = \{\beta > 0 : \nu_{\mathrm{R}}(\{\beta\}) > 0\}.$$

则

$$\mathrm{AtSupp}_+(\nu_{\mathrm{R}}) = \{\beta_n\}.$$

因此

$$\gamma_n = \beta_n^{-1/2}.$$

另一方面，

$$\nu_{\mathrm{R}}(\{\beta_n\}) = m_n \beta_n,$$

故

$$\boxed{m_n = \frac{\nu_{\mathrm{R}}(\{\beta_n\})}{\beta_n}.}$$

于是 ν_{R} 同时恢复不同零点纵坐标与解析重数。

定义

$$H_{\mathrm{id}} e_n = \gamma_n e_n, \qquad M_{\mathrm{mult}} e_n = m_n e_n.$$

这唯一确定 pair $(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$ 的酉等价类。

再定义重数放大：

$$\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_{\mathrm{id}}) = \oplus_n \gamma_n I_{m_n}.$$

这正是

$$H_{\mathrm{Ren}}.$$

逆向显然：H_{Ren} 的本征值—重数数据恢复 γ_n, m_n，进而恢复 ν_{R} 与 F_{R}。证毕。

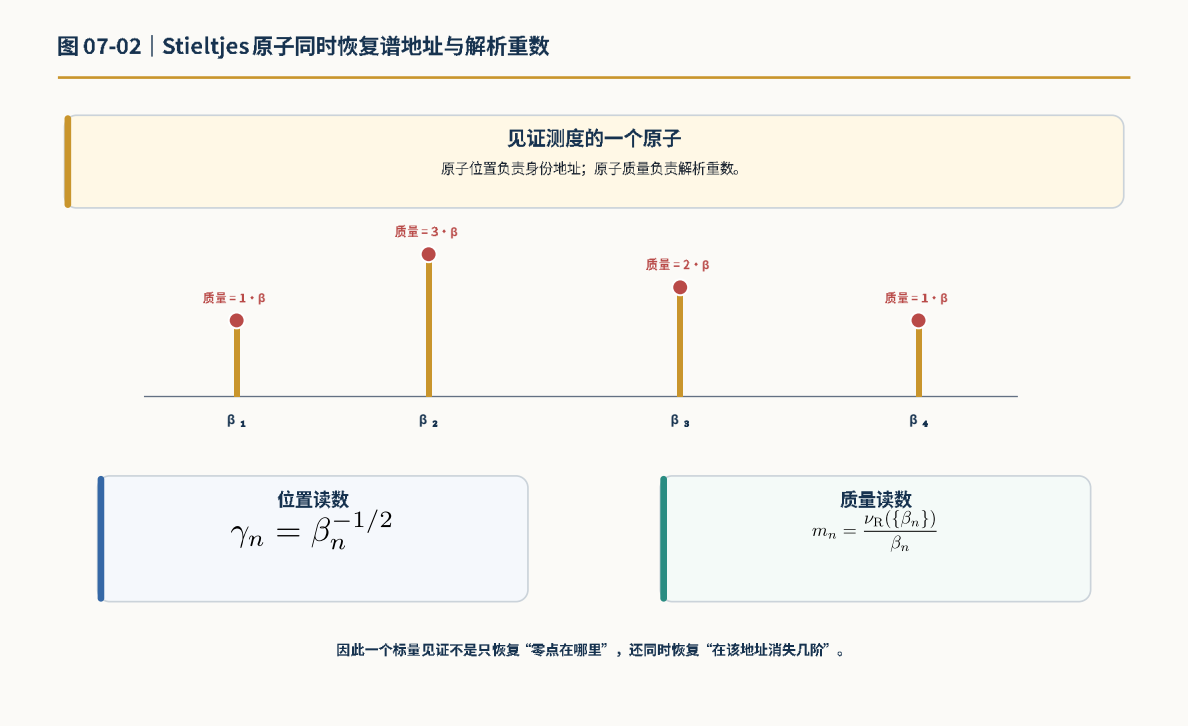


图 07-02　Stieltjes 原子的双重读数。 见证测度中每个正原子的位置 β_n 通过 $\gamma_n = \beta_n^{-1/2}$ 恢复 distinct zero ordinate；同一原子的质量则通过 $m_n = \nu_R(\{\beta_n\})/\beta_n$ 恢复解析重数。因此一个标量见证同时确定零点地址与除子权重。

5. 局部解析芽与全阶矩见证

本章的见证不要求独立生成源实现一开始就给出整个亚纯响应。局部全阶数据已经足够。

5.1 矩序列

在

$$|y| < \gamma_1^2$$

内，

$$\frac{1}{1+y\beta} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k y^k \beta^k$$

一致可积，因此

$$F_R(y) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \mu_k^R y^k,$$

其中

$$\boxed{\mu_k^R = \int \beta^k d\nu_R(\beta) = \sum_n m_n \gamma_n^{-2k-2}.}$$

于是

$$\boxed{F_{\mathrm{R}}^{(k)}(0) = (-1)^k k!\,\mu_k^{\mathrm{R}}.}$$

定理 5.1（紧支撑矩见证定理）

设 ν_1, ν_2 为 $[0,\infty)$ 上紧支撑有限正测度。若

$$\int \beta^k \, d\nu_1(\beta) = \int \beta^k \, d\nu_2(\beta) \qquad \forall k \geq 0,$$

则

$$\boxed{\nu_1 = \nu_2.}$$

证明

取 $R > 0$ 使

$$\mathrm{supp}\nu_1 \cup \mathrm{supp}\nu_2 \subset [0, R].$$

矩 equality 蕴含两测度对每个 polynomial p 的积分相同。

由 Weierstrass approximation theorem，polynomials 在 $C([0,R])$ 中一致稠密。因此两测度对每个连续函数 $f \in C([0,R])$ 的积分均相同。

由有限 Borel 测度的 Riesz 表示唯一性，

$$\nu_1 = \nu_2.$$

证毕。

推论 5.2（全阶矩见证）

若 $\nu_{\times}$ 为紧支撑有限正测度，且

$$\boxed{\mu_k^{\times} = \mu_k^{\mathrm{R}} \qquad \forall k \geq 0,}$$

则

$$\boxed{\nu_{\times} = \nu_{\mathrm{R}}.}$$

推论 5.3（局部解析芽见证）

若 $F_{\times}$ 与 F_{R} 均在 $y = 0$ 的某邻域解析，并满足

$$F_{\times}^{(k)}(0) = F_{\mathrm{R}}^{(k)}(0) \qquad \forall k \geq 0,$$

则两者具有相同解析芽。

若二者均为相应紧支撑有限正测度的 Stieltjes 变换，则

$$\boxed{\nu_{\times} = \nu_{\mathrm{R}}.}$$

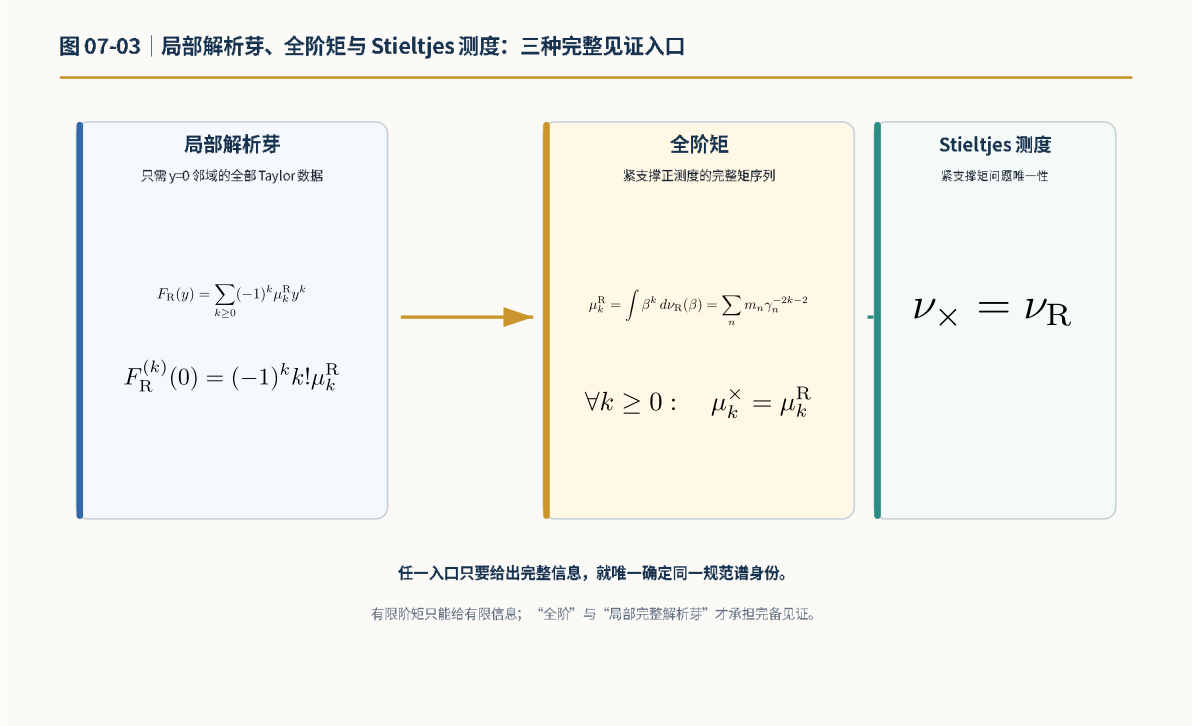


图 07-03　三种完整见证入口。$y=0$ 附近的完整解析芽等价于全部导数数据，进而给出全阶矩 μ_k^{R}；紧支撑正测度的完整矩序列又唯一决定 Stieltjes 测度。因而完整局部解析芽、全阶矩与测度是同一规范谱身份的三个完备入口。有限阶矩本身不承担这一全局唯一性。

6. 开区间响应唯一性

定理 6.1（解析响应见证定理）

设 $\nu_{\times}$ 为 $[0,\infty)$ 上紧支撑有限正测度，并定义

$$F_{\times}(y)=\int\frac{d\nu_{\times}(\beta)}{1+y\beta}.$$

若存在非空实开区间

$$I\subset(0,\infty)$$

使

$$\boxed{F_{\times}(y)=F_{\mathrm{R}}(y)\qquad\forall y\in I,}$$

则

$$\boxed{\nu_{\times}=\nu_{\mathrm{R}}.}$$

证明

两 Stieltjes transforms 在包含正实轴的共同连通解析域中解析。

它们在具有聚点的实开区间 I 上相等，由恒等定理得到在共同解析域上相等。

再由 Stieltjes transform uniqueness，

$$\nu_{\times} = \nu_{\mathrm{R}}.$$

证毕。

注 6.2

因此精确相认不需要逐个比较

$$\gamma_n.$$

只需证明一个标量解析响应在任何非空开区间上与 F_{R} 一致，即已足够。

7. 见证的循环谱实现

7.1 规范见证空间

令

$$\boxed{\mathcal{H}_{\mathrm{W}} = L^2([0,\infty), d\nu_{\mathrm{R}}).}$$

定义乘法算子

$$\boxed{(B_{\mathrm{R}} f)(\beta) = \beta f(\beta).}$$

因为

$$\mathrm{supp}\nu_{\mathrm{R}} \subset [0, \beta_1],$$

所以 B_{R} 是有界正自伴算子。

令

$$\mathbf{1}(\beta) \equiv 1.$$

由于 ν_{R} 为有限测度，

$$\mathbf{1} \in \mathcal{H}_{\mathrm{W}}.$$

并且

$$\boxed{F_{\mathrm{R}}(y) = \langle (I + yB_{\mathrm{R}})^{-1}\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle.}$$

7.2 循环性

因为 ν_{R} 是纯原子测度，且所有原子 β_n 彼此不同，polynomials in B_{R} 作用于 $\mathbf{1}$ 生成的子空间在 $\mathcal{H}_{\mathrm{W}}$ 中稠密。

因此 $\mathbf{1}$ 是循环向量。

等价地，$(B_{\mathrm{R}}, \mathbf{1})$ 是 Riemann 见证的规范循环实现。

8. 循环见证唯一性定理

定理 8.1

设 $\mathcal{H}_{\times}$ 为 Hilbert space，

$$B_{\times} = B_{\times}^{*} \geq 0$$

为有界算子，$\Psi_{\times} \in \mathcal{H}_{\times}$ 为循环向量。

定义

$$\boxed{F_{\times}(y) = \langle (I + yB_{\times})^{-1}\Psi_{\times}, \Psi_{\times} \rangle.}$$

若满足以下任一条件：

(A) 开区间响应相等

存在非空开区间 $I \subset (0, \infty)$，使

$$F_{\times}(y) = F_{\mathrm{R}}(y) \qquad \forall y \in I;$$

或

(B) 全阶矩相等

$$\langle B_{\times}^{k}\Psi_{\times}, \Psi_{\times} \rangle = \mu_{k}^{\mathrm{R}} \qquad \forall k \geq 0,$$

则存在 unitary

$$U : \mathcal{H}_{\times} \to L^{2}(\nu_{\mathrm{R}})$$

满足

$$\boxed{UB_{\times}U^{-1} = B_{\mathrm{R}},}$$

以及

$$\boxed{U\Psi_{\times} = \mathbf{1}.}$$

即

$$\boxed{(B_{\times}, \Psi_{\times}) \simeq (B_{\mathrm{R}}, \mathbf{1})}$$

为带基点的酉等价。

证明

由谱定理，$(B_{\times}, \Psi_{\times})$ 定义唯一标量谱测度

$$\nu_{\times}(E) = \langle E_{B_{\times}}(E)\Psi_{\times}, \Psi_{\times}\rangle.$$

因为 $B_{\times}$ 有界 positive，

$$\mathrm{supp}\nu_{\times} \subset [0, \| B_{\times} \|].$$

并且

$$F_{\times}(y) = \int \frac{d\nu_{\times}(\beta)}{1 + y\beta}.$$

在条件 (A) 下，由定理 6.1，

$$\nu_{\times} = \nu_{\mathrm{R}}.$$

在条件 (B) 下，

$$\langle B_{\times}^{k}\Psi_{\times}, \Psi_{\times}\rangle = \int \beta^{k}\, d\nu_{\times}(\beta),$$

所以由定理 5.1，

$$\nu_{\times} = \nu_{\mathrm{R}}.$$

由于 $\Psi_{\times}$ 为循环向量，循环谱定理给出带基点表示

$$(\mathcal{H}_{\times}, B_{\times}, \Psi_{\times}) \simeq (L^{2}(\nu_{\times}), M_{\beta}, \mathbf{1}).$$

代入

$$\nu_{\times} = \nu_{\mathrm{R}}$$

即得结论。证毕。

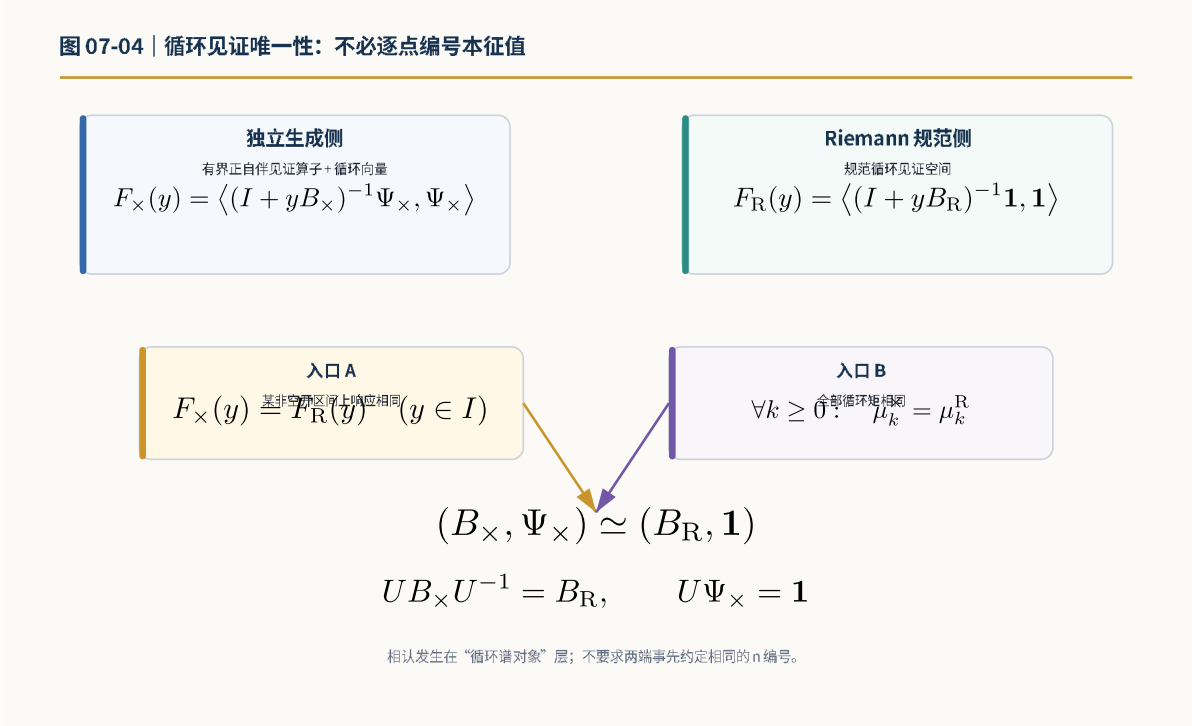


图 07-04　循环见证唯一性。对一个有界正自伴见证算子与循环向量，只要其标量响应在某非空开区间与 F_{R} 相同，或者全部循环矩与 Riemann 规范矩相同，就由 Stieltjes 唯一性、矩唯一性和循环谱定理得到带基点酉等价 $(B_\times, \Psi_\times) \simeq (B_{\mathrm{R}}, \mathbf{1})$。这个对象级相认不要求两侧事先使用同一组本征值编号。

9. 从有界见证算子到 Hilbert–Pólya 算子

9.1 平方逆变换

在规范见证空间上，

$$B_{\mathrm{R}} u_n = \beta_n u_n, \qquad \beta_n = \gamma_n^{-2}.$$

因为

$$\nu_{\mathrm{R}}(\{0\}) = 0,$$

B_{R} 无 kernel。

定义 un 有界正自伴算子

$$\boxed{H_{\mathrm{id}} = B_{\mathrm{R}}^{-1/2}}$$

通过谱函数演算。

于是

$$H_{\mathrm{id}} u_n = \gamma_n u_n.$$

因此 H_{id} 是身份保真的 Hilbert–Pólya 实现。

定理 9.1（见证到 Hilbert–Pólya 的传递）

在定理 8.1 的假设下，若

$$H_{\times} = B_{\times}^{-1/2},$$

则

$$\boxed{H_{\times} \simeq H_{\mathrm{id}}.}$$

证明

由

$$UB_{\times}U^{-1} = B_{\mathrm{R}}$$

和 Borel 函数演算，

$$UB_{\times}^{-1/2}U^{-1} = B_{\mathrm{R}}^{-1/2}.$$

故

$$UH_{\times}U^{-1} = H_{\mathrm{id}}.$$

证毕。

10. 解析重数恢复与除子放大

10.1 从见证测度恢复解析重数

由

$$\nu_{\mathrm{R}}(\{\beta_n\}) = m_n\beta_n,$$

有

$$\boxed{m_n = \frac{\nu_{\mathrm{R}}(\{\beta_n\})}{\beta_n}.}$$

因此循环见证同时决定不同谱身份地址与解析重数。

10.2 解析重数算子

在身份空间上定义

$$\boxed{M_{\mathrm{mult}}e_n = m_n e_n.}$$

则 M_{mult} 与 H_{id} 强交换。

10.3 除子放大

定义

$$\boxed{\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_{\mathrm{id}}) = \oplus_n \gamma_n I_{m_n}.}$$

这就是除子保真的规范 Ren–Riemann 算子：

$$\boxed{\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_{\mathrm{id}}) \simeq H_{\mathrm{Ren}}.}$$

结合定理 9.1，得到：

定理 10.1（见证到 Ren–Riemann 谱类的传递）

若生成源侧循环对 $(B_\times, \Psi_\times)$ 满足定理 8.1 的任一见证条件，则

$$\boxed{H_\times \simeq H_{\mathrm{id}}}$$

且从同一见证测度恢复的解析重数算子 M_{mult} 满足

$$\boxed{\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_\times) \simeq H_{\mathrm{Ren}}.}$$

因此独立生成源实现通过标量见证与 Ren–Riemann 规范谱类完成身份相认。

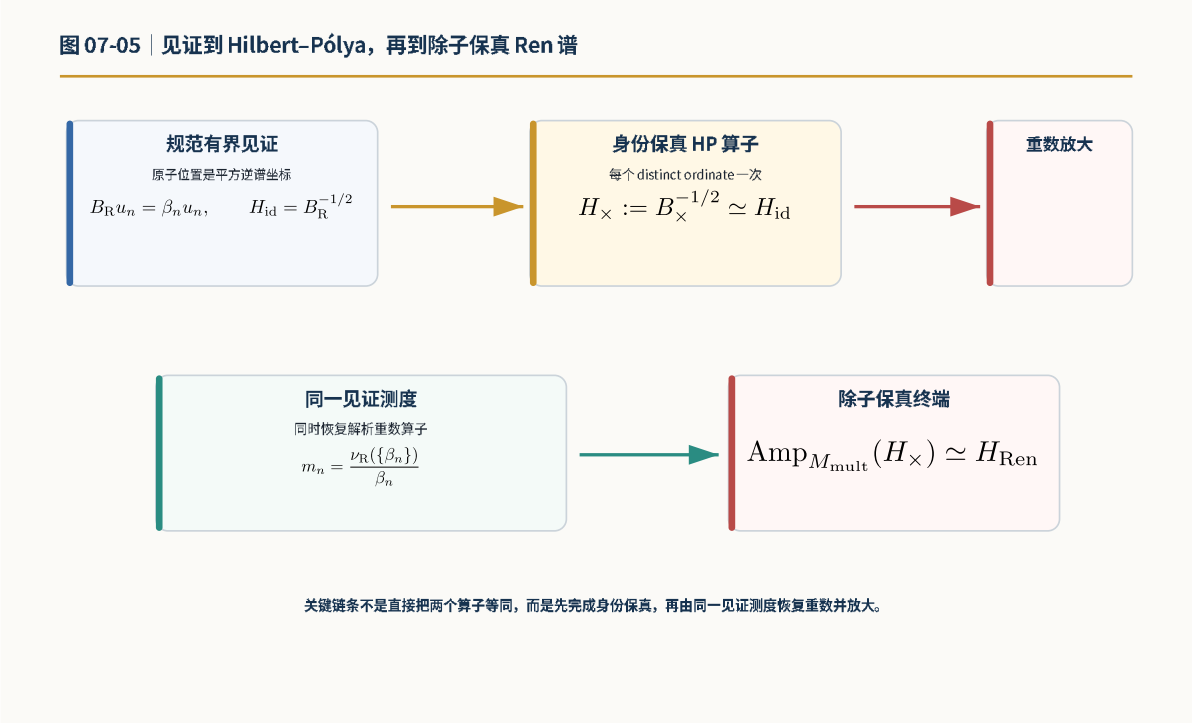


图 07-05　从见证到 Hilbert–Pólya 与除子保真谱。 平方逆变换先把有界见证算子送到身份保真的 Hilbert–Pólya 实现 $H_\times \simeq H_{\mathrm{id}}$；同一见证测度再独立恢复解析重数，并通过 M_{mult} 作 multiplicity amplification，最终得到 $\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_\times) \simeq H_{\mathrm{Ren}}$。因此不能把正确链条缩写成 $H_\times \simeq H_{\mathrm{Ren}}$。

11. 生成源谱到 Riemann 谱的相认定理

定理 11.1

设某独立数学构造给出：

1. Hilbert space $\mathcal{H}_{\times}$；
2. 有界正自伴算子

$$B_{\times};$$

3. 循环向量

$$\Psi_{\times};$$

4. 生成源定义的响应

$$F_{\times}(y) = \langle (I + yB_{\times})^{-1}\Psi_{\times}, \Psi_{\times}\rangle.$$

该构造由自身生成源数据定义 $B_{\times}$、$\Psi_{\times}$ 与 $F_{\times}$。

若该独立构造进一步证明：

$$\boxed{F_{\times} = F_{\mathrm{R}}}$$

在某非空开区间成立，或者证明所有矩满足

$$\boxed{\langle B_{\times}^{k}\Psi_{\times}, \Psi_{\times}\rangle = \mu_{k}^{\mathrm{R}} \qquad \forall k,}$$

则：

$$\boxed{(B_{\times}, \Psi_{\times}) \simeq (B_{\mathrm{R}}, \mathbf{1}),}$$

$$\boxed{H_{\times} = B_{\times}^{-1/2} \simeq H_{\mathrm{id}},}$$

以及

$$\boxed{\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_{\times}) \simeq H_{\mathrm{Ren}}.}$$

对象含义

$B_{\times}$ 已由独立生成源构造给出；本定理承担终端谱身份相认。

其对象级结论为：

$$\boxed{\text{相同完整响应} \Rightarrow \text{相同谱身份}.}$$

因此该定理属于谱身份相认层。

12. 与第九章独立 Hilbert–Pólya 路线的关系

第九章的独立 Hilbert–Pólya 路线从根乘法身份出发，建立

$$\boxed{\mathcal{R}_\times \to \text{生成源正结构} \to B_\times \to H_\times = H_\times^* \to \text{Riemann 零点闭合.}} \tag{12.1}$$

本章的见证链位于这一独立生成方向的终端：

$$\boxed{(B_\times, \Psi_\times) \to F_\times \overset{\text{witness}}{=} F_{\mathrm{R}} \to \text{Riemann 规范谱身份相认.}} \tag{12.2}$$

相应的双侧结构为

$$\begin{array}{ccc} \text{Riemann 规范侧} & & \text{独立生成源侧} \\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}} & & \mathcal{R}_\times \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathfrak{W}_{\mathrm{R}} & & (B_\times, \Psi_\times) \\ & & \Downarrow \\ & & H_\times \\ \mathfrak{W}_{\mathrm{R}} & \Leftrightarrow & F_\times \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ H_{\mathrm{Ren}} & \simeq & \mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_\times). \end{array} \tag{12.3}$$

第九章承担从乘法生成源到自伴谱的独立构造；本章承担终端见证与规范谱身份相认。两章共享相认接口，但生成方向彼此独立。

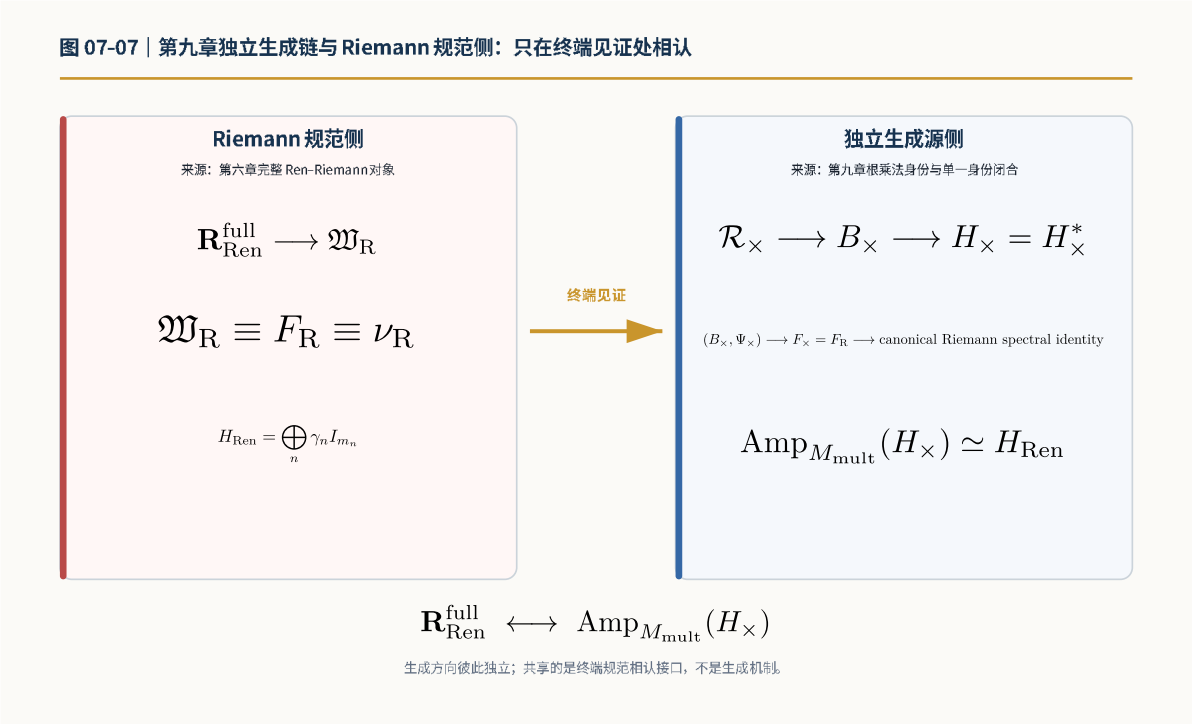


图 07-07　独立生成链与规范侧的终端相认。 Riemann 规范侧由第六章完整 Ren–Riemann 对象压缩出规范见证；第九章则从根乘法身份独立生成 $B_\times$ 与自伴 $H_\times$。两条链在生成方向上彼此独立，只在终端通过 $F_\times = F_{\mathrm{R}}$ 或等价的完整见证条件完成规范谱身份相认，再由同一测度恢复重数并进入 H_{Ren}。

13. 对象级相认与逐点编号

传统相认直觉可能要求证明

$$\lambda_n = \gamma_n \qquad \forall n.$$

而本章说明，对于循环实现，这并不是必要的证明格式。

若

$$F_{\times} = F_{\mathrm{R}},$$

则直接得到

$$\nu_{\times} = \nu_{\mathrm{R}},$$

进而所有原子位置、原子权重自动一致。

于是

$$\beta_n^{\times} = \beta_n^{\mathrm{R}},$$

以及

$$m_n^{\times} = m_n^{\mathrm{R}}$$

同时成立。

再由

$$\gamma_n = \beta_n^{-1/2},$$

全部零点纵坐标自动恢复。

因此对象级证明是：

$$\boxed{\text{响应相同} \Rightarrow \text{测度相同} \Rightarrow \text{谱身份.}}$$

这一对象级相认不依赖两端预先选择相同的本征值编号。

14. 身份保真与除子保真表示

14.1 身份保真算子

令

$$\mathcal{H}_{\mathrm{id}} = \ell^2(\mathbb{N}),$$

定义

$$\boxed{H_{\mathrm{id}} e_n = \gamma_n e_n.}$$

则每个 distinct ordinate 的本征空间为一维：

$$\dim\ker(H_{\mathrm{id}} - \gamma_n I) = 1.$$

14.2 除子保真算子

定义

$$\mathcal{H}_{\mathrm{div}} = \oplus_n \mathbb{C}^{m_n},$$

以及

$$\boxed{H_{\mathrm{Ren}} = \oplus_n \gamma_n I_{m_n}.}$$

则

$$\dim\ker(H_{\mathrm{Ren}} - \gamma_n I) = m_n.$$

因此：

$$\boxed{\text{identity} \neq \text{multiplicity.}}$$

但是 pair

$$(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$$

与

$$H_{\mathrm{Ren}}$$

携带相同除子数据。

15. 身份表示与除子表示的双向重建

定理 15.1

$$\boxed{[H_{\mathrm{Ren}}]_{\mathrm{u}} \quad \leftrightarrow \quad [(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})]_{\mathrm{u}}}$$

为一一对应。

证明

由 H_{Ren} 的谱投影可恢复不同谱支撑

$$\gamma_n$$

和 ranks

$$m_n = \mathrm{rank} E_{H_{\mathrm{Ren}}}(\{\gamma_n\}).$$

从而恢复 $(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$。

反之，由 $(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$ 对每个一维谱纤维做 m_n-fold amplification，得到

$$\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_{\mathrm{id}}) = \oplus_n \gamma_n I_{m_n} \simeq H_{\mathrm{Ren}}.$$

证毕。

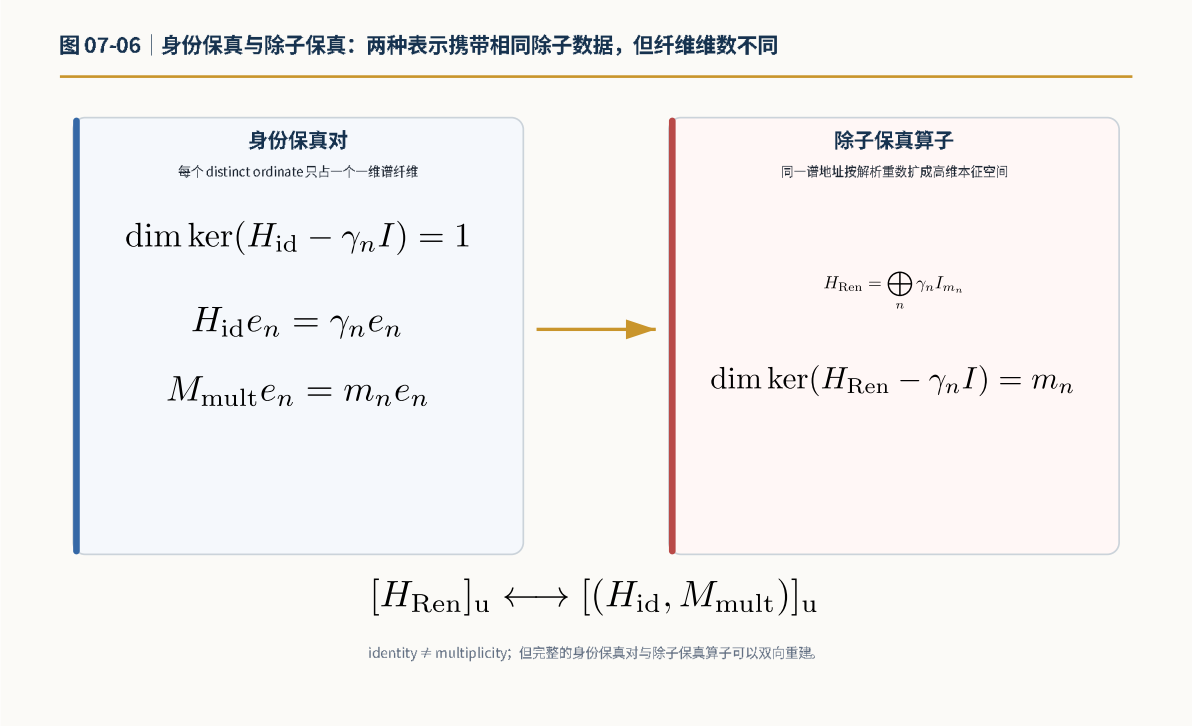


图 07-06　身份保真与除子保真表示。H_{id} 对每个 distinct ordinate 只保留一个一维谱纤维，解析重数由独立的 M_{mult} 保存；H_{Ren} 则把同一地址扩成 m_n 维本征空间。两种表示的纤维维数不同，但 $(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$ 与 H_{Ren} 携带相同完整除子数据，并在酉等价类层面双向重建。

16. Hilbert–Pólya 实现的规范分类

16.1 身份保真实现类

称正自伴紧预解式算子 A 为身份保真实现，若其本征值恰为不同的 γ_n，且每个本征空间一维。

则：

定理 16.1

$$\boxed{A\text{身份保真} \Leftrightarrow A \simeq H_{\mathrm{id}}.}$$

16.2 除子保真实现类

称 A 为除子保真实现，若

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \{\gamma_n\}$$

且

$$\dim\ker(A-\gamma_n I)=m_n.$$

则：

定理 16.2

$$\boxed{A\text{除子保真}\Leftrightarrow A\simeq H_{\mathrm{Ren}}.}$$

这些分类结果不是独立生成源构造，而是说明一个已经拥有相应 Riemann 谱数据的自伴实现属于哪个规范酉等价类。

17. Fredholm 相容性

定义

$$B_{\mathrm{Ren}}=H_{\mathrm{Ren}}^{-2}.$$

则

$$B_{\mathrm{Ren}}=\oplus_n\gamma_n^{-2}I_{m_n}\in\mathfrak{S}_1.$$

因此

$$\boxed{\frac{X(z)}{X(0)}=\det(I+z^2B_{\mathrm{Ren}}).}$$

在身份空间上定义

$$B_{\mathrm{id}}=H_{\mathrm{id}}^{-2}.$$

则普通 determinant 只计一次每个不同谱身份地址，而全部重数由 M_{mult} 补回：

$$\boxed{\frac{X(z)}{X(0)}=\prod_n\left(1+\frac{z^2}{\gamma_n^2}\right)^{m_n}.}$$

在不穿越零点并选定对数分支的单连通区域，

$$\boxed{\log\frac{X(z)}{X(0)}=\mathrm{Tr}[M_{\mathrm{mult}}\log(I+z^2B_{\mathrm{id}})].}$$

因此见证测度、身份表示与除子表示对同一个完成解析对象给出一致读数。

18. 信息层级

Riemann 谱对象具有以下严格层级：

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{\mathrm{full}}_{\mathrm{Ren}} \to \mathfrak{W}_{\mathrm{R}} \leftrightarrow \nu_{\mathrm{R}} \leftrightarrow \\ (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \leftrightarrow H_{\mathrm{Ren}} \to H_{\mathrm{id}} \to \Gamma_{+}.\end{aligned}}$$

不同箭头含义不同。

18.1 完整对象 → 规范见证

遗忘完整生成源/完成化来源标记，只保留足以确定谱身份的标量解析响应。

18.2 见证 ↔ 测度

Stieltjes transform uniqueness。

18.3 测度 ↔ 身份保真对

atom locations 给出 γ_n，atom weights 给出 m_n。

18.4 身份保真对 ↔ 除子保真算子

重数放大 / reduction。

18.5 除子/身份表示 → 身份算子

遗忘 M_{mult}，因此丢失解析重数。

18.6 身份算子 → 裸支撑

进一步遗忘 Hilbert 空间实现，只保留集合

$$\Gamma_{+}.$$

所以：

$$\boxed{\text{裸谱} \prec_{\mathrm{info}} \text{规范谱见证} \prec_{\mathrm{info}} \text{完整标记来源对象.}}$$

这里“$\prec_{\mathrm{info}}$”表示信息层级严格降低；集合论包含统一使用 $\subset$ 或 $\subsetneq$。

19. Hilbert–Pólya 相关谱路线的对象层

不同谱路线主要读取 Riemann 对象的不同信息层：

路线	主要对象	主要读取层
Hilbert–Pólya	自伴算子	实谱身份
Selberg 迹公式	Laplacian 与迹公式	几何/算术 ↔ 谱
Weil	正二次型	算术正性
Montgomery–Odlyzko	零点间隔统计	二阶谱组织
de Branges	整函数 Hilbert 空间	解析函数 ↔ Hilbert 结构

路线	主要对象	主要读取层
Berry–Keating	xp/伸缩生成元	连续尺度/频率
Connes	非交换迹公式	算术来源 ↔ 谱迹
Suzuki	Weil/de Branges Hilbert 结构	正性 → Hilbert 空间 → 谱
本章	标量循环见证	精确谱身份相认

本章在这些对象层之间加入的接口为

$$\boxed{\text{独立谱实现与 Riemann 规范谱身份的唯一相认.}} \tag{19.1}$$

20. 与第八章二阶谱统计的接口

定义带符号除子保真算子

$$D_{\mathrm{Ren}} = H_{\mathrm{Ren}} \oplus (-H_{\mathrm{Ren}}),$$

以及带符号身份保真算子

$$D_{\mathrm{id}} = H_{\mathrm{id}} \oplus (-H_{\mathrm{id}}).$$

前者保存解析重数，后者只保留不同零点纵坐标。

对合适测试函数 ϕ，定义

$$Z_{\phi}(t) = \mathrm{Tr}\big(\phi(D_{\mathrm{Ren}})e^{itD_{\mathrm{Ren}}}\big).$$

二点统计读取的是零点纵坐标之间的关系，而非见证相认本身。

因此：

$$\boxed{\text{见证身份} \neq \text{二阶谱统计.}}$$

统计讨论可以从 D_{Ren} 或 D_{id} 读取所需数据，而不需要携带完整生成源来源标记。

21. 有限维截断与矩一致性

取前 N 个不同零点纵坐标。

定义

$$H_{\mathrm{id},N} = \mathrm{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_N),$$

$$M_{\mathrm{mult},N} = \mathrm{diag}(m_1, \dots, m_N).$$

其除子放大为

$$H_{\mathrm{Ren},N} = \oplus_{n\le N}\gamma_n I_{m_n}.$$

于是有限维精确恒等式：

$$\det(I + z^2 H_{\mathrm{Ren},N}^{-2}) = \prod_{n\le N}\left(1 + \frac{z^2}{\gamma_n^2}\right)^{m_n},$$

以及

$$\operatorname{logdet}(I + z^2 H_{\mathrm{Ren},N}^{-2}) = \operatorname{Tr}\left[M_{\mathrm{mult},N} \log(I + z^2 H_{\mathrm{id},N}^{-2})\right]$$

在一致的对数分支上成立。

同时，有限矩 list

$$\mu_0, \dots, \mu_K$$

可以作为数值 consistency check，但必须严格区分：

$$\boxed{\text{有限阶矩相等} \not\Rightarrow \text{精确见证身份.}}$$

定理 5.1 的精确唯一性使用全部矩。

因此有限维数值核对只能验证结构原型、数值一致性和截断收敛趋势，不替代无限阶见证定理。

22. 一般完成 L-函数的形式扩展

对于完成 L-函数

$$\Lambda_L(s)$$

若相应临界线结论已经成立，并有不同零点纵坐标 $\gamma_{L,n}$ 与解析重数 $m_{L,n}$，定义

$$\nu_L = \sum_n m_{L,n}\, \gamma_{L,n}^{-2} \delta_{\gamma_{L,n}^{-2}},$$

以及

$$F_L(y) = \int \frac{d\nu_L(\beta)}{1 + y\beta}.$$

则同样得到：

$$F_L \Leftrightarrow \nu_L \Leftrightarrow (H_{L,\mathrm{id}}, M_L) \Leftrightarrow H_{L,\mathrm{div}}.$$

同一形式结论依赖以下条件：

- 紧支撑有限正见证测度；
- 循环谱定理；
- Stieltjes 唯一性；
- 紧支撑矩问题的确定性。

因此该扩展在相应完成 L-函数已经具有临界线谱数据时成立。

23. Riemann 谱见证与传递总定理

定理 23.1

在 RH 成立的 Riemann 规范侧，定义

$$\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}} = \frac{d}{dy}\log\frac{X(\sqrt{y})}{X(0)}.$$

则：

(a) 标量完备性

$$\boxed{\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \nu_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \Leftrightarrow H_{\mathrm{Ren}}.}$$

(b) 矩完备性

全阶矩

$$\mu_k^{\mathrm{R}} = \int \beta^k \, d\nu_{\mathrm{R}}(\beta)$$

唯一决定 ν_{R}。

(c) 解析芽完备性

F_{R} 在 0 的全阶解析芽唯一决定 ν_{R}。

(d) 循环见证唯一性

若独立循环对 $(B_\times, \Psi_\times)$ 的标量预解式响应与 F_{R} 在某非空开区间一致，或具有相同全部矩，则

$$\boxed{(B_\times, \Psi_\times) \simeq (B_{\mathrm{R}}, \mathbf{1}).}$$

(e) Hilbert–Pólya 谱身份传递

令

$$H_\times = B_\times^{-1/2}.$$

则

$$\boxed{H_\times \simeq H_{\mathrm{id}}.}$$

(f) 除子传递

由见证测度恢复解析重数算子 M_{mult}，有

$$\boxed{\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_\times) \simeq H_{\mathrm{Ren}}.}$$

(g) 与独立生成链的接口

第九章独立生成 $B_\times$ 与 $H_\times$；本章的 (d)–(f) 在终端读取 $F_\times$，并完成与 Riemann 规范谱身份的相认。

证明

(a) 为定理 4.1。

(b) 为定理 5.1。

(c) 由 Taylor coefficient 与矩的关系

$$F_{\mathrm{R}}^{(k)}(0) = (-1)^k k!\,\mu_k^{\mathrm{R}}$$

和 (b)。

(d) 为定理 8.1。

(e) 为定理 9.1。

(f) 为定理 10.1。

(g) 由第 12 节的两层结构直接给出。证毕。

24. 结论

第六章给出规范 Riemann 谱算子 H_{Ren} 及其完整标记对象；本章从中提取标量规范谱见证

$$\boxed{\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}}.}$$

这一见证唯一确定 Stieltjes 测度

$$\nu_{\mathrm{R}},$$

而 ν_{R} 又唯一确定

$$\{\gamma_n\}, \qquad \{m_n\}, \qquad (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}), \qquad H_{\mathrm{Ren}}.$$

因此

$$\boxed{\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \nu_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \Leftrightarrow H_{\mathrm{Ren}}.} \tag{24.1}$$

对于任意独立生成的循环谱对

$$(B_\times, \Psi_\times),$$

若其标量预解式响应

$$F_\times(y) = \langle (I + yB_\times)^{-1}\Psi_\times, \Psi_\times \rangle$$

与 F_{R} 在非空开区间一致，或具有相同的全阶矩，则

$$\boxed{(B_\times, \Psi_\times) \simeq (B_{\mathrm{R}}, \mathbf{1}),} \tag{24.2}$$

从而

$$\boxed{H_\times \simeq H_{\mathrm{id}},} \tag{24.3}$$

并且

$$\boxed{\mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_\times) \simeq H_{\mathrm{Ren}}.} \tag{24.4}$$

因此，谱身份可以在对象层完成相认：

$$\boxed{\text{响应相同} \Rightarrow \text{测度相同} \Rightarrow \text{循环谱对象相同} \Rightarrow \text{Riemann 规范谱身份相同.}} \tag{24.5}$$

第七章由此完成从规范 Riemann 谱对象到唯一谱身份见证的桥梁。第八章在这一一阶谱身份基础上进入 GUE 二阶自身关系；第九章从根乘法身份出发，独立构造源生成（source-generated）Hilbert–Pólya 谱，并可在终端通过本章的规范见证完成身份相认。

附录 A｜核心符号

符号	含义
$X(z)$	$\xi(1/2+z)$
$G(y)$	$X(\sqrt{y})/X(0)$
F_{R}	Riemann 标量谱见证
$\mathfrak{W}_{\mathrm{R}}$	Riemann 规范谱见证
β_n	γ_n^{-2}
ν_{R}	$\sum m_n \beta_n \delta_{\beta_n}$
B_{R}	multiplication by β on $L^2(\nu_{\mathrm{R}})$
$\mathbf{1}$	规范循环向量
H_{id}	$B_{\mathrm{R}}^{-1/2}$，身份保真的 Hilbert–Pólya 算子
M_{mult}	解析重数算子
H_{Ren}	除子保真的规范 Ren–Riemann 算子
$\boldsymbol{R}_{\mathrm{Ren}}^{\mathrm{full}}$	完整标记 Ren–Riemann 谱对象
μ_k^{R}	$\int \beta^k \, d\nu_{\mathrm{R}}$
$B_\times, \Psi_\times$	独立生成源侧循环见证对
$H_\times$	$B_\times^{-1/2}$

附录 B｜见证条件的等价入口

本章使用三种精确见证条件：

$$\boxed{F_\times = F_{\mathrm{R}} \text{在某非空开区间}}$$

$$\Downarrow$$

共同 Stieltjes 解析域中的同一解析延拓

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nu_\times = \nu_{\mathrm{R}}.}$$

另一条等价入口是：

$$\boxed{F_\times^{(k)}(0) = F_{\mathrm{R}}^{(k)}(0) \quad \forall k}$$

或

$$\boxed{\mu_k^{\times} = \mu_k^{\mathrm{R}} \quad \forall k.}$$

有限个矩只构成有限阶一致性核对：

$$\boxed{\mu_k^{\times} = \mu_k^{\mathrm{R}} \quad 0 \le k \le K}$$

不能推出精确见证身份。

附录 C｜见证定理的对象范围

本章的规范见证定理作用于循环 Stieltjes 谱类。其精确入口包括：

$$F_{\times} = F_{\mathrm{R}}$$

在非空开区间成立；

或

$$F_{\times}^{(k)}(0) = F_{\mathrm{R}}^{(k)}(0) \qquad \forall k \ge 0;$$

或等价地

$$\mu_k^{\times} = \mu_k^{\mathrm{R}} \qquad \forall k \ge 0.$$

这些条件共同推出

$$\nu_{\times} = \nu_{\mathrm{R}},$$

进而确定

$$(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \quad 与 \quad H_{\mathrm{Ren}}.$$

有限阶矩相等只给出有限阶一致性；完整谱身份由全阶见证条件确定。第九章的独立 Hilbert–Pólya 构造负责生成源侧自伴谱，本章负责其终端规范相认。解析简单性不作为前置条件，解析重数始终由 M_{mult} 与除子保真表示保留。

第八章　从 Riemann 谱见证到 GUE

二点自身关系、乘法源迁移与有限尺度重整化接口

摘要

Riemann Hypothesis、Hilbert–Pólya 与 GUE 分属不同数学层级：第一章固定非平凡零点的横向位置，第六、七章建立一阶规范谱及其身份见证，本章则从已经确定的一阶 Riemann 谱身份进入二点及高阶自身关系。

设不同正零点纵坐标为 γ_n，解析重数为 m_n，并采用第七章的身份保真对

$$H_{\mathrm{id}}e_n = \gamma_n e_n, \qquad M_{\mathrm{mult}}e_n = m_n e_n.$$

定义带符号谱算子与重数显示

$$\mathcal{D} = H_{\mathrm{id}} \oplus (-H_{\mathrm{id}}), \qquad \mathcal{M} = M_{\mathrm{mult}} \oplus M_{\mathrm{mult}}.$$

对适当窗口 ϕ 与测试函数 F，谱振幅

$$Z_\phi(u) = \mathrm{Tr}\big[\mathcal{M}\phi(\mathcal{D})e^{iu\mathcal{D}}\big]$$

满足精确的二点 Fourier–Plancherel 恒等式

$$\sum_{\lambda,\mu} m_\lambda\, m_\mu \phi(\lambda)\overline{\phi(\mu)}F(\lambda-\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{F}\,(u)|Z_\phi(u)|^2\,du.$$

因此 GUE 所处的是一阶谱已经形成之后的二阶自身关系层。

若任意独立源生成（source-generated）Hilbert–Pólya 实现 $(H_\times, M_\times)$ 经第七章的 Riemann 谱见证识别为

$$(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),$$

则其带符号算子、迹振幅、二点测度、形状因子以及全部由函数演算与迹构造的酉不变二点观测与规范 Riemann 表示完全一致。这给出二阶见证继承：一阶谱身份相同，二阶酉不变结构随之相同。

通过 Guinand–Weil / 显式公式接口，一阶 von Mangoldt 数据 $\Lambda(n)$ 在二点自身积中提升为

$$\Lambda(m)\Lambda(n).$$

对角部分产生 Montgomery ramp 的主结构，非对角部分进入平移 Mangoldt 相关。若生成源长度为

$$X = T^\alpha,$$

则高度 T 的微观探针共同分辨的整数位移满足

$$|h| \lesssim \frac{X}{T} = T^{\alpha-1},$$

因而 $\alpha = 1$ 是二阶算术分辨率阈值，与 RH 的临界实坐标 $1/2$ 属于不同层级。

有限尺度下，ζ 与 CUE/GUE 的原始二点组织并不相同。随机矩阵侧由 Vandermonde^2 联合律组织；ζ 侧由 Euler / 局部同余因子与整数中的确定性算术位置组织。两端先形成各自的自身关系，完成展开归一化与 Fourier 投影，再扣除各自独立定义的有限尺度结构，最终进入共同的二点观测商空间。这一结构称为**乘法自身关系迁移**。

原始（RAW）数据的重整化由无拟合映射

$$\mathfrak{M}: K_\zeta^{\text{原始}} \mapsto K_\zeta^{\text{原始}} - K_\zeta^{\text{local}} + K_U^{\text{ref}}$$

实现。有限尺度数值账本中，原始平均差异从 0.147475 降至 0.0151165；采用预先规定的有限 Euler 分辨率 $p \le H$ 后降至 0.0135793。结构拆除与恢复对照同时显示，$\Lambda(n)$ 的整数位置和素数局部因子控制主要的非对角有限尺度修正。

重整化后的残差

$$\varepsilon_{\text{ren}}$$

作为有限尺度二阶观测保留。结构握手要求双方经各自修正后进入同一个二点观测比较空间；若进一步要求经典无限 GUE / sine-kernel 渐近，则

$$\varepsilon_{\text{ren}} \to 0$$

构成更强的渐近特化。

有限 N CUE 修正与高位 Riemann 零点数据进一步给出有限到有限的比较层：

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \zeta_{\text{原始}} & \to & \zeta_{\text{ren}} & \to & \mathcal{Q}_{\text{pair}} \\ & & & & \updownarrow \\ \text{CUE}_{N_{\text{eff}}} & \to & \text{CUE/GUE}_{\text{bulk}} & \to & \mathcal{Q}_{\text{pair}}. \end{array}}$$

因此，本章建立从一阶 Riemann 谱身份到二阶自身关系、算术二点结构与有限尺度 GUE 比较的连续接口。第九章随后回到根乘法身份，从生成源端独立构造 Hilbert–Pólya 谱。

1. 从一阶谱身份到二阶自身关系

第七章已经固定一阶 Riemann 谱身份：

$$\boxed{(H_{\text{id}}, M_{\text{mult}}), \qquad H_{\text{id}} e_n = \gamma_n e_n, \qquad M_{\text{mult}} e_n = m_n e_n.} \tag{1.1}$$

其中 H_{id} 记录不同零点纵坐标，M_{mult} 独立记录解析重数。等价的除子保真实现为

$$H_{\text{Ren}} = \oplus_n \gamma_n I_{m_n}. \tag{1.2}$$

Riemann 谱见证给出

$$F_{\text{R}} \Leftrightarrow \nu_{\text{R}} \Leftrightarrow (H_{\text{id}}, M_{\text{mult}}) \Leftrightarrow H_{\text{Ren}}. \tag{1.3}$$

1.1 第七章谱见证给出的一阶输入

由第七章 Riemann 谱见证定理，在相应 Stieltjes 循环谱类中，

$$\boxed{\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \nu_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \Leftrightarrow H_{\mathrm{Ren}}.} \tag{1.3a}$$

因此本章的一阶输入为

$$\boxed{(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),} \tag{1.3b}$$

其中

$$H_{\mathrm{id}} e_n = \gamma_n e_n, \qquad M_{\mathrm{mult}} e_n = m_n e_n.$$

若另一源生成（source-generated）Hilbert–Pólya 实现 $(H_\times, M_\times)$ 已经通过同一谱见证被识别为

$$\boxed{(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),} \tag{1.3c}$$

则两种表示携带同一个一阶 Riemann 谱身份。

这一相认固定一阶谱身份；本章由此进入二阶层，并证明一阶酉等价传递到所有由函数演算与迹构造的酉不变二点观测。

因此逻辑入口是：

$$\boxed{\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} \Rightarrow [(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})]_{\mathrm{u}} \Rightarrow \text{规范二阶自身关系.}} \tag{1.3d}$$

本章讨论的是在这一阶身份已经固定之后的下一层：

本章讨论的是在这一阶身份已经固定之后的下一层：

$$\boxed{\{\gamma_n, m_n\} \to \text{二点自身关系} \to \text{酉随机矩阵比较.}} \tag{1.4}$$

因此三类问题保持区分：

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{RH} & : \text{非平凡零点是否位于临界线,} \\ \mathrm{HP} & : \text{零点纵坐标是否具有自然自伴实现,} \\ \mathrm{GUE} & : \text{这些一阶谱身份之间的局部二点/高阶关系如何组织.} \end{array}} \tag{1.5}$$

若某个独立源生成实现

$$(H_\times, M_\times)$$

已经由 Riemann 谱见证识别为

$$(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}), \tag{1.6}$$

则本章全部二点构造在两种表示中一致。第 3.3 节给出相应的酉不变性定理。

因此本章的逻辑链为：

$$\boxed{\text{规范/已相认的一阶谱} \to \text{精确二点演算} \to \text{算术自身相关} \to \text{有限尺度重整化接口.}} \tag{1.7}$$

因此本章的对象起点是已经确定的一阶谱身份，GUE 位于其二阶自身关系层。

2. Montgomery–Dyson–Odlyzko 二点统计背景

Montgomery 在 1973 年讨论 Riemann 零点差 $\gamma - \gamma'$ 的 Fourier 统计。在 RH 下，他证明经典形状因子在固定 $0 \le \alpha < 1$ 上满足

$$F(\alpha, T) = (1 + o(1)) T^{-2\alpha} \log T + \alpha + o(1). \tag{2.1}$$

忽略 $\alpha = 0$ 的 Dirac 型对角项后，得到

$$K(\alpha) = |\alpha|, \qquad 0 < |\alpha| < 1. \tag{2.2}$$

Dyson 随后指出，Montgomery 猜测的二点函数正是大型 complex Hermitian/酉随机矩阵（复厄米/酉随机矩阵）的局部谱统计形式。Odlyzko 的高位零点计算进一步显示，零点局部间距统计与随机厄米矩阵预测具有强烈吻合，而且高度越高，有限样本偏差通常越小。

这一历史对应的二阶结构问题为：

> 一个由素数乘法源产生的确定谱， 其二点局部统计会进入酉 universality class（酉普适类）。
>
> (2.3)

一阶谱见证与自伴实现解决的是谱身份层；本章讨论的正是 (2.3) 的二阶层。

3. 从确定的一阶谱到精确二点迹

3.1 双边谱与重数显示

定义带符号 Hilbert–Pólya 算子

$$\mathcal{D} = H_{\mathrm{id}} \oplus (-H_{\mathrm{id}}), \tag{3.1}$$

以及

$$\mathcal{M} = M_{\mathrm{mult}} \oplus M_{\mathrm{mult}}. \tag{3.2}$$

其离散谱为

$$\sigma(\mathcal{D}) = \{\pm\gamma_n\}, \tag{3.3}$$

而 $\mathcal{M}$ 只提供同一身份地址上的解析权重。

对平滑窗口 ϕ 定义谱振幅（谱振幅）

$$Z_\phi(u) := \mathrm{Tr}\left[\mathcal{M}\phi(\mathcal{D})e^{iu\mathcal{D}}\right] = \sum_{\lambda=\pm\gamma_n} m_\lambda\, \phi(\lambda)e^{iu\lambda}. \tag{3.4}$$

3.2 二点 Fourier–Plancherel 恒等式

取 Schwartz 测试函数 F，采用

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{F}\,(u)e^{iux}\,du. \tag{3.5}$$

则直接展开可得

$$\boxed{\sum_{\lambda,\mu} m_\lambda\, m_\mu \phi(\lambda)\overline{\phi(\mu)}F(\lambda-\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{F}\,(u)|Z_\phi(u)|^2\,du.} \tag{3.6}$$

这是 Fourier–Plancherel 层面的精确恒等式，独立于 GUE 渐近假设。

式 (3.6) 把一阶谱点提升为两两关系，因此从一阶谱进入二阶自身关系。

3.3 二阶见证继承定理

一阶谱见证的酉等价性自动传递到二点酉不变结构。

设

$$U:\mathcal{H}_{\times}\to\mathcal{H}_{\mathrm{id}}$$

为酉，并满足

$$UH_{\times}U^{-1}=H_{\mathrm{id}},\qquad UM_{\times}U^{-1}=M_{\mathrm{mult}}. \tag{3.7}$$

定义带符号源生成算子

$$\mathcal{D}_{\times}=H_{\times}\oplus(-H_{\times}),\qquad \mathcal{M}_{\times}=M_{\times}\oplus M_{\times}, \tag{3.8}$$

以及

$$\mathcal{U}=U\oplus U.$$

则

$$\mathcal{U}\mathcal{D}_{\times}\mathcal{U}^{-1}=\mathcal{D},\qquad \mathcal{U}\mathcal{M}_{\times}\mathcal{U}^{-1}=\mathcal{M}. \tag{3.9}$$

定理 3.1（二阶见证继承）

对任意使相关算子为迹类的窗口 ϕ，以及任意 $u\in\mathbb{R}$，

$$\boxed{\mathrm{Tr}\big[\mathcal{M}_{\times}\phi(\mathcal{D}_{\times})e^{iu\mathcal{D}_{\times}}\big]=\mathrm{Tr}\big[\mathcal{M}\phi(\mathcal{D})e^{iu\mathcal{D}}\big].} \tag{3.10}$$

因而两端具有完全相同的加权二点测度、形状因子与所有由函数演算和迹构造的酉不变二点观测。

证明

由 (3.9) 和 Borel 函数演算，

$$\phi(\mathcal{D})=\mathcal{U}\phi(\mathcal{D}_{\times})\mathcal{U}^{-1},$$

$$e^{iu\mathcal{D}}=\mathcal{U}e^{iu\mathcal{D}_{\times}}\mathcal{U}^{-1}.$$

因此相应迹类算子互为酉共轭。迹在酉共轭下不变，得到 (3.10)。再代入二点 Fourier–Plancherel identity，即得到所有二点观测的一致性。证毕。

这个定理给出本章所需的 **源生成（source-generated） 等价 GUE 接口：**

$$\boxed{(H_{\times},M_{\times})\simeq(H_{\mathrm{id}},M_{\mathrm{mult}})\Rightarrow\mathcal{P}_2(H_{\times},M_{\times})=\mathcal{P}_2(H_{\mathrm{id}},M_{\mathrm{mult}}),} \tag{3.11}$$

其中 $\mathcal{P}_2$ 表示完整的二点观测量 family。

因此，任何独立构造的 Hilbert–Pólya 实现一旦被识别为同一个一阶谱身份，其全部酉不变二点结构自动与规范 representation 一致；二阶理论无需因一阶表示的来源不同而重新建立。

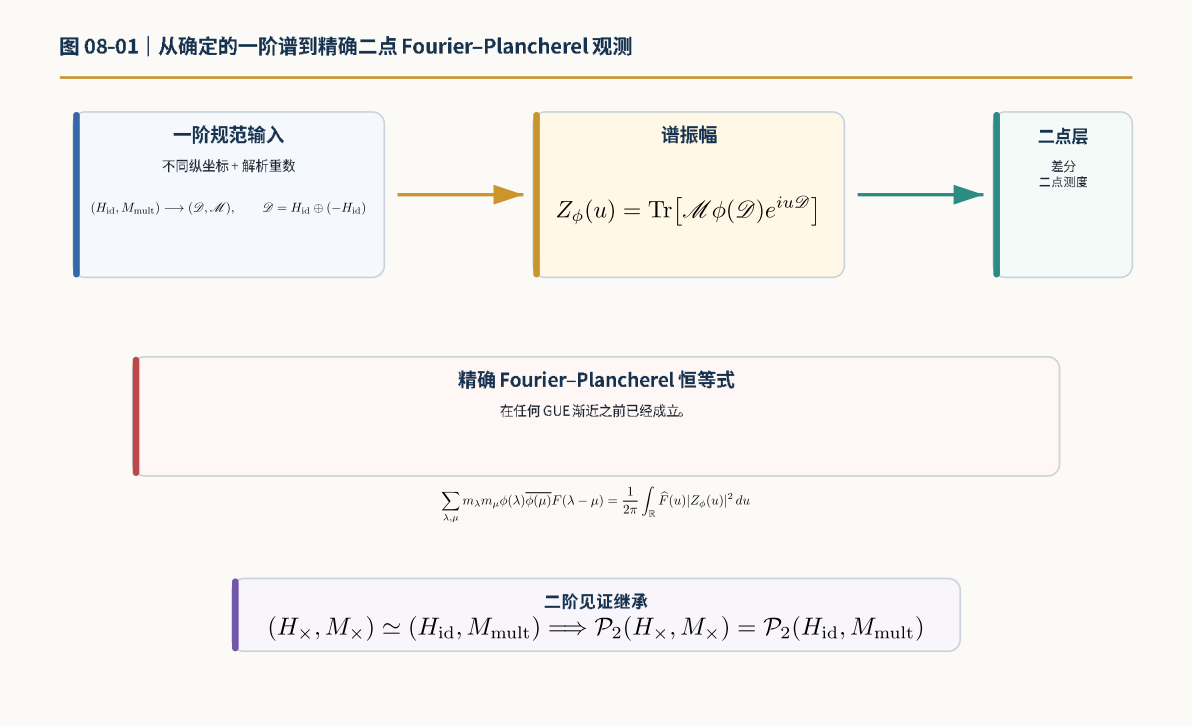


图 08-01　从一阶谱到精确二点观测。已固定的一阶谱身份 $(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$ 先扩成带符号双边谱 $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$，再通过谱振幅 $Z_\phi(u)$ 形成精确的二点 Fourier–Plancherel 恒等式。这一步完全独立于 GUE 渐近；若另一源生成实现与规范一阶谱酉等价，则全部酉不变二点观测自动继承。

4. 展开归一化：去除平均密度

Riemann 零点纵坐标的平均密度随高度缓慢变化。若直接比较原始 γ_n 间距，不同高度的平均间距不同，不能与平稳体相随机矩阵律（平稳体相随机矩阵律）直接比较。

取 Riemann–von Mangoldt 平滑计数主项

$$\bar{N}(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi} - 1\right) + \frac{7}{8}. \tag{4.1}$$

定义展开归一化后的坐标（展开坐标）

$$\boxed{x_n = \bar{N}(\gamma_n).} \tag{4.2}$$

局部平均间距于是被归一化到约 1。

GUE/CUE 的普适体相二点 density（普适体相二点密度）为

$$\boxed{R_2(u) = 1 - \left(\frac{\sin\pi u}{\pi u}\right)^2.} \tag{4.3}$$

该式包含能级排斥（能级排斥）：$u \to 0$ 时，两个不同谱点同时出现的概率密度被压低。

5. ζ 谱与 GUE 的二阶对应

所谓“zeta 谱与 GUE 一一对应”只有在对象层级固定后才具有严格含义。本章采用如下 correspondence dictionary（对应字典）：

ζ / HP 确定谱	GUE/CUE 随机矩阵侧	对应方式

ζ / HP 确定谱	GUE/CUE 随机矩阵侧	对应方式
ordinate γ_n	eigen 相位/eigenvalue point	先展开归一化后比较点过程，不作逐样本逐点等同
$x_n = \bar{N}(\gamma_n)$	bulk-展开归一化后的 spectral point	同一局部平均间距尺度
difference $x_m - x_n$	eigenvalue difference	二点相对坐标
二点测度 $\sum_{m,n} \delta_{x_m - x_n}$	ensemble 二点测度	测试函数意义下比较
Fourier transform of 二点测度	spectral 形状因子	Fourier 双向接口
对角 $m = n$	自身相关对角	ramp 的对角来源
connected 非对角	connected GUE correlation	plateau / sine-kernel 的非平凡部分
ζ arithmetic decoration	有限尺寸 / arithmetic 修正	在普适商空间前单独入账

因此本章真正的“一一对应”是

$$\boxed{\text{确定谱对象} \leftrightarrow \text{同类型随机矩阵观测量（观测量）}} \tag{5.1}$$

而不是

$$\boxed{\text{第}n\text{个 Riemann 零点} = \text{某一随机矩阵样本的第}n\text{个本征值.}} \tag{5.2}$$

后者既不规范，也不是 GUE 统计预测的内容。

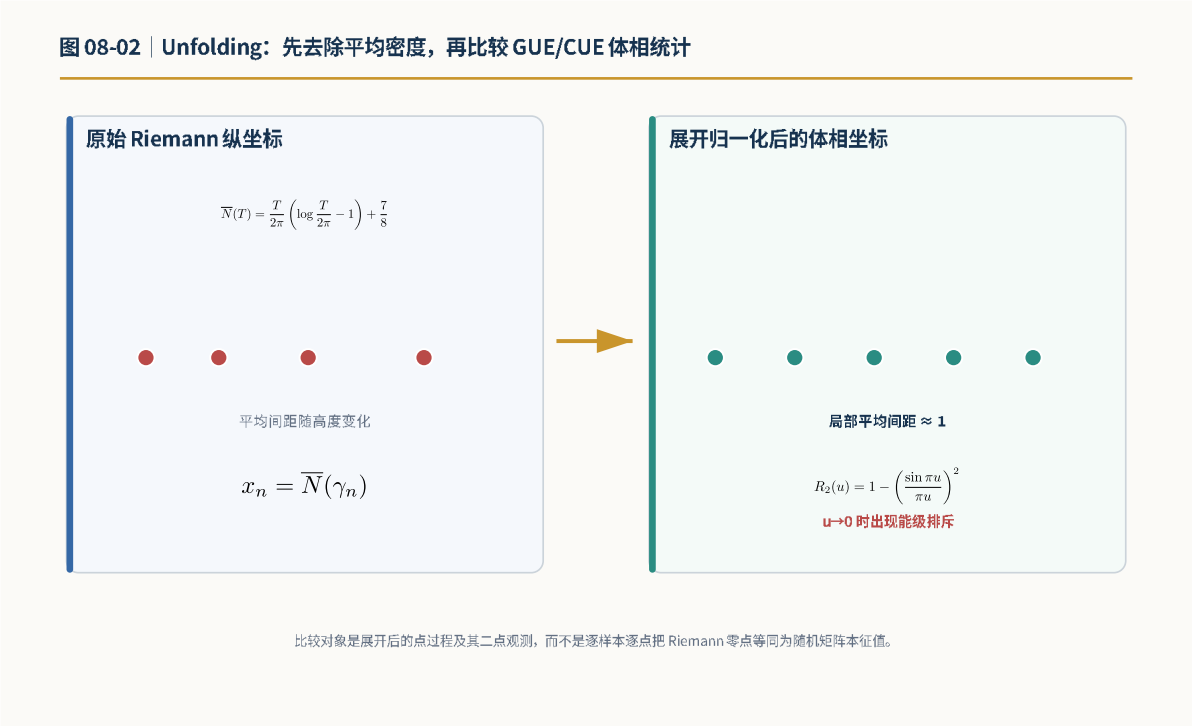


图 08-02　Unfolding。原始 Riemann 零点的平均密度随高度变化，因此先用 Riemann–von Mangoldt 平滑计数主项把 γ_n 映为 $x_n = \bar{N}(\gamma_n)$，将局部平均间距归一到约 1。只有在这一尺度上，才与 GUE/CUE 体相 sine-kernel 二点密度比较；比较的是点过程观测量，而不是逐样本逐点等同。

6. 一阶谱到素数侧的算术接口

一阶 Riemann 谱读出通过 Guinand–Weil 显式公式（显式公式）与素数幂数据相连。令

$$H_{\text{mult}} e_n = (\log n) e_n, \qquad \Lambda_\times e_n = \Lambda(n) e_n. \tag{6.1}$$

对合适偶测试函数 h 与 Fourier transform g，有结构式

$$\mathrm{Tr}[M_{\mathrm{mult}}h(H_{\mathrm{id}})] = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{\infty}[h] - \mathrm{Tr}\big[\Lambda_{\times}e^{-H_{\mathrm{mult}}/2}g(H_{\mathrm{mult}})\big]. \tag{6.2}$$

算术侧等于

$$\sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}g(\log n). \tag{6.3}$$

定义 prime-event measure（素数事件测度）

$$\mu_{\mathrm{prime}} = \sum_{n\geq 2}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}\delta_{\log n} = \sum_{p}\sum_{k\geq 1}\frac{\log p}{p^{k/2}}\delta_{k\log p}. \tag{6.4}$$

这里这里保持以下类型区分：

$$\{\gamma_n\} \not\equiv \{k\log p\} \quad \text{逐点相等.} \tag{6.5}$$

它们由显式公式在**测试函数整体层**互相读出。

7. 二点自身积与 $\Lambda(m)\Lambda(n)$

一点迹是线性的：

$$\mu \mapsto \langle \mu, f\rangle. \tag{7.1}$$

二点统计则是

$$\mu \mapsto \mu \otimes \mu. \tag{7.2}$$

若谱振幅的算术部分记为 $P_{\phi}(u)$，显式公式给出

$$Z_{\phi}(u) = A_{\phi}(u) + P_{\phi}(u), \tag{7.3}$$

其中 A_{ϕ} 为 Archimedean/background contribution（阿基米德/背景贡献）。二点平方产生

$$|Z_{\phi}|^2 = |A_{\phi}|^2 + 2\Re(A_{\phi}\overline{P_{\phi}}) + |P_{\phi}|^2. \tag{7.4}$$

真正的算术二点涨落集中在

$$\boxed{|P_{\phi}(u)|^2.} \tag{7.5}$$

展开后必然出现

$$\boxed{|P_{\phi}(u)|^2 = \sum_{m,n}\frac{\Lambda(m)\Lambda(n)}{\sqrt{mn}}W_{\phi,u}(\log m, \log n).} \tag{7.6}$$

所以平移 Mangoldt 相关不是后来人为添加的困难。它是把一点谱自身相乘以后**必然产生的二阶对象**。

7.1 一阶乘法身份的二阶相对关系

上一节若只写成“$\Lambda(n)$ 变成 $\Lambda(m)\Lambda(n)$”，还没有把这一转折的几何意义说清楚。真正发生的是：**同一个乘法身份不再只被读取一次，而开始与自身形成相对关系。**

在乘法源 Hilbert 空间上有

$$H_{\times}e_n = (\log n)e_n. \tag{7.7}$$

一点读取只问“第 n 个乘法事件的对数尺度是多少”。进入二点层以后，最自然的算子不再是 $H_{\times}$ 本身，而是 tensor-difference operator（张量差算子）

$$\boxed{D_{\times} = H_{\times}\otimes I - I\otimes H_{\times}.} \tag{7.8}$$

它的谱为

$$\boxed{\mathrm{spec}D_{\times} = \{\log m - \log n\} = \left\{\log\frac{m}{n}\right\}.} \tag{7.9}$$

这一步的含义非常重要。**一阶乘法的自然坐标是 $\log n$；二阶乘法自身关系的自然坐标不是 m 和 n 各自，而是它们的比值 m/n。** 因而二阶不是“再造一套新算术”，而是原乘法身份的 relative readout（相对读取）。

若二点探针集中在近对角区域

$$m = n + h, \qquad |h| \ll n, \tag{7.10}$$

则

$$\log\frac{n+h}{n} = \frac{h}{n} + O\left(\frac{h^2}{n^2}\right). \tag{7.11}$$

于是得到本章后半轮最重要的结构转折之一：

$$\boxed{\text{乘法相对关系 } \log(m/n) \quad \to \quad \text{微观加法近对角关系 } h = m - n.} \tag{7.12}$$

这就是“乘法与乘法自身相遇”的严格版本。它不是说乘法突然变成加法；而是说：**乘法对象与自身做二阶比较以后，靠近 identity ratio $m/n = 1$ 的微观坐标，恰好由加法差 h 线性化。**

因此后面出现 prime-pair / shifted-Mangoldt 问题不是路线偏移，而是二阶乘法身份在 near-identity（近单位元）区域的自然坐标表达。

式 (7.8)–(7.12) 是算子与局部展开层面的恒等结构；它们本身不等同于 sine-kernel / 无限 GUE asymptotic。

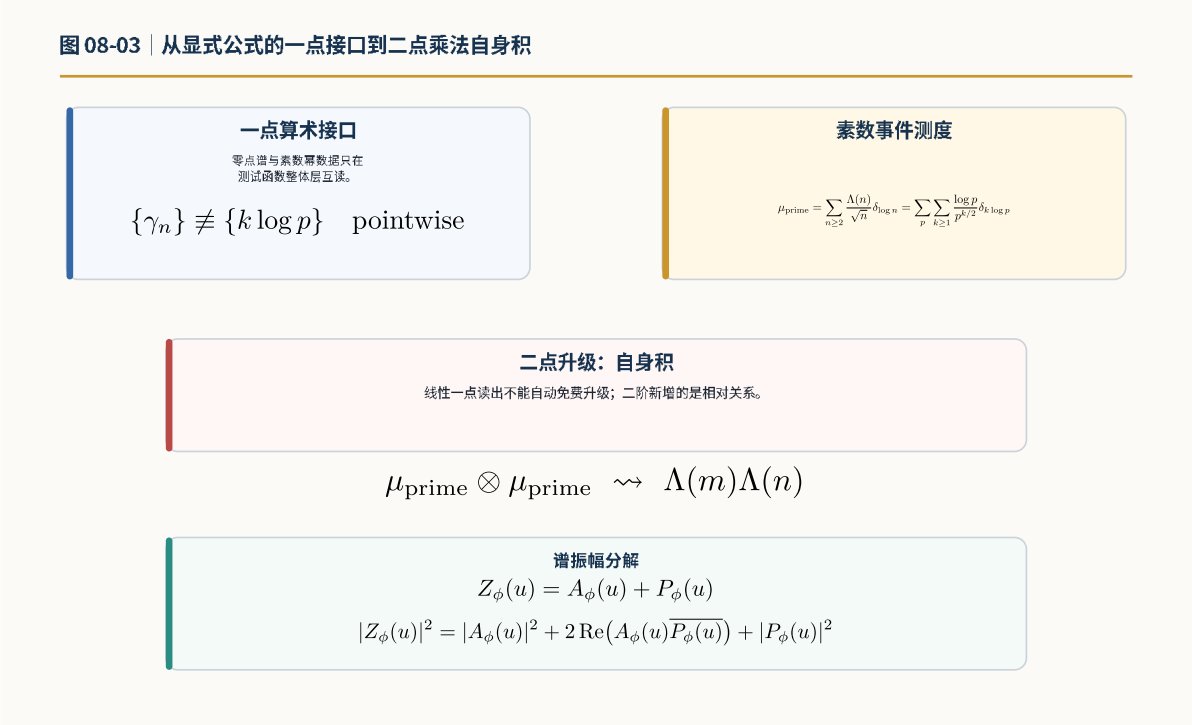


图 08-03　一点接口到二点自身积。显式公式在测试函数整体层把 Riemann 一阶谱与素数幂生成源联系起来，但 $\{\gamma_n\}$ 与 $\{k\log p\}$ 不是逐点同一。进入二阶后，线性一点读出升级为 prime-event measure 的自身积，新增对象正是 $\Lambda(m)\Lambda(n)$ 及其相对/平移相关；谱振幅平方也同时产生算术二次项与交叉项。

8. 对角项与 Montgomery ramp

把 (7.6) 分成

$$m = n \quad 和 \quad m \neq n. \tag{8.1}$$

对角项为

$$\sum_n \frac{\Lambda(n)^2}{n} W(n,n). \tag{8.2}$$

它保留同一个算术事件与自身配对，因此不需要控制不同 prime channels 之间的相对位置。

在 Montgomery 的归一化下，这一部分对应

$$\boxed{K(\alpha) = |\alpha|, \qquad 0 < |\alpha| < 1.} \tag{8.3}$$

Montgomery 在 RH 下证明了相应形状因子渐近的 $0 \le \alpha < 1$ 区域；本章不把 $|\alpha| > 1$ plateau 写成该经典定理已覆盖的范围。

9. 非对角项：乘法局部性与加法近对角

非对角项写成

$$m = n + h, \qquad h \neq 0. \tag{9.1}$$

其核心数据是

$$\Lambda(n)\Lambda(n+h). \tag{9.2}$$

另一方面，二点谱只读取 log-ratio（对数比）

$$\log \frac{m}{n}. \tag{9.3}$$

若 $m = n + h$ 且 $|h| \ll n$，则

$$\boxed{\log \frac{n+h}{n} = \frac{h}{n} + O\left(\frac{h^2}{n^2}\right).} \tag{9.4}$$

于是：

$$\boxed{\text{乘法相对坐标 } \log(m/n) \quad \rightarrow \quad \text{微观加法近对角坐标 } h = m - n.} \tag{9.5}$$

这解释了一个看似反常的事实：ζ 的一阶结构由 Euler product 乘法局部化，而它的二阶自身关系却自然进入 additive shift（加法平移）问题。

9.1 局部 Euler 乘法与全局加法近邻

一阶对数导数

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n \ge 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{9.6}$$

是 Euler-product local（Euler 乘积局部）的：每个 prime channel（素数通道）可以分别登记。

进入二阶以后，真正的非对角 sector（非对角扇区）含

$$\Lambda(m)\Lambda(n). \tag{9.7}$$

在最重要的基本 sector（本原扇区）里，两端往往来自不同的素数通道，典型地可写为

$$p \neq q, \qquad (p,q) = 1. \tag{9.8}$$

这时没有单个 Euler factor 能把这对关系重新“局部对角化”。而微观谱条件

$$T\log(p/q) = O(1) \tag{9.9}$$

又在 $p, q \asymp X$ 时变成

$$q - p = h, \qquad |h| \lesssim X/T. \tag{9.10}$$

因此原来的直觉可以更精确地改写为：

局部乘法因子之间的二阶关系， 通过全局加法近邻读出。 (9.11)

这里指坐标与二阶关系的结构转换，不表示 sine-kernel 已经证明。真正可以无条件保留的是

$$\boxed{\text{乘法二阶化} \Rightarrow \text{additive 近对角相对谱（加法近对角相对谱）.}} \tag{9.12}$$

而

$$\boxed{\text{实际相对谱} \Rightarrow \text{sine-kernel scaling}} \tag{9.13}$$

仍然需要 Actual-to-Dual Transfer 等二阶算术输入。

10. $\alpha = 1$：二阶乘法源分辨率阈值

令高度参数为 T，显式公式探测的源长度取

$$X = T^{\alpha}. \tag{10.1}$$

局部 probe 对 log-ratio 的分辨率约为 $1/T$。若 $n \asymp X$，则

$$T\log\frac{n+h}{n} = O(1) \tag{10.2}$$

要求

$$\boxed{|h| \lesssim \frac{X}{T} = T^{\alpha-1}.} \tag{10.3}$$

于是有以下对象边界：

$$\alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad X/T \to 0, \tag{10.4}$$

非零整数 h 最终无法进入同一个微观探针，只剩 $h = 0$；而

$$\alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad X/T \to \infty, \tag{10.5}$$

越来越多非零 shift 可见。

故

$$\boxed{\alpha = 1} \tag{10.6}$$

是一个真实的 arithmetic resolution threshold（算术分辨率阈值）。

这不是说 $\alpha = 1$ 本身已经证明了 GUE，而是解释了 ramp/plateau 难度在这里发生质变。

10.1 临界实坐标 $1/2$ 与二阶分辨率阈值 $\alpha = 1$

“一阶乘法与二阶乘法的相遇迫使系统出现一个自对偶临界点”这一表述只有拆开后才具有严格含义。

第一种临界属于 RH：

$$\sigma = \frac{1}{2}, \tag{10.7}$$

它来自完成 zeta 的函数方程（泛函方程）

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{10.8}$$

这是 **identity-level duality center（身份层对偶中心）**。

第二种临界属于二阶生成源分辨率（源分辨率）：

$$\alpha = 1, \tag{10.9}$$

它来自

$$H = X/T = T^{\alpha-1} \tag{10.10}$$

从“小于一个整数 shift”跨到“能够容纳非零 shift”的阈值。这是 **自身相关 resolution threshold（自身相关分辨率阈值）**。

两者不能混成同一个定理。但它们在讨论结构上形成了一种清楚的阶数对应：一阶对偶中心固定谱轴，二阶相对读取的固定尺度决定对角/非对角的交界。

10.2 One-swap 互反对偶与 $\alpha = 1$

进一步地，$\alpha = 1$ 并不只是分辨率直觉。在 long Dirichlet polynomial（长狄利克雷多项式）的 one-swap（一次交换）结构中，自然长度比为

$$r = \frac{X}{Q(t)}, \qquad Q(t) \asymp \frac{T}{2\pi}, \tag{10.11}$$

并存在 reciprocal involution（互易对合）

$$\boxed{r \mapsto r^{-1}.} \tag{10.12}$$

等价地，长度变换为

$$X^{\vee} = \frac{Q(t)^2}{X}, \tag{10.13}$$

固定点是

$$X = Q(t) \asymp T. \tag{10.14}$$

若写 $X = T^{\alpha}$，则指数坐标渐近满足

$$\alpha^{\vee} = 2 - \alpha + o(1), \qquad \boxed{\alpha = 1} \tag{10.15}$$

为固定尺度。

对低一阶生成源

$$D_X(t) = \sum_{n \le X} n^{-1/2-it}, \tag{10.16}$$

归一化二阶均值的对角 contribution 给出 α；当 $X > T$ 后，one-swap/dual contribution 补上

$$1 - \alpha. \tag{10.17}$$

因此在这一低一阶模型中出现严格原型

$$\boxed{K_0(\alpha) = \min(\alpha, 1), \qquad 0 < \alpha < 2,} \tag{10.18}$$

即

$$\boxed{\text{direct 对角} + \text{dual 非对角} = \alpha + (1-\alpha) = 1.} \tag{10.19}$$

这一步极其重要：**plateau 修正 $1-\alpha$ 在低一阶 ζ-生成源中已经有真实的直接/对偶数学原型，并不是从 GUE 目标倒推出来的。**

但它仍不能直接升级成完整 GUE。因为真正的对数导数 / von-Mangoldt 层需要把系数从低一阶模型提升到 $\Lambda(n)$，并控制真实二阶平均的统一余项。

one-swap reciprocal structure 与低一阶直接/对偶 decomposition 在相应框架中给出精确原型；把这一结构提升为经典 full zero plateau 需要额外的二阶算术控制。

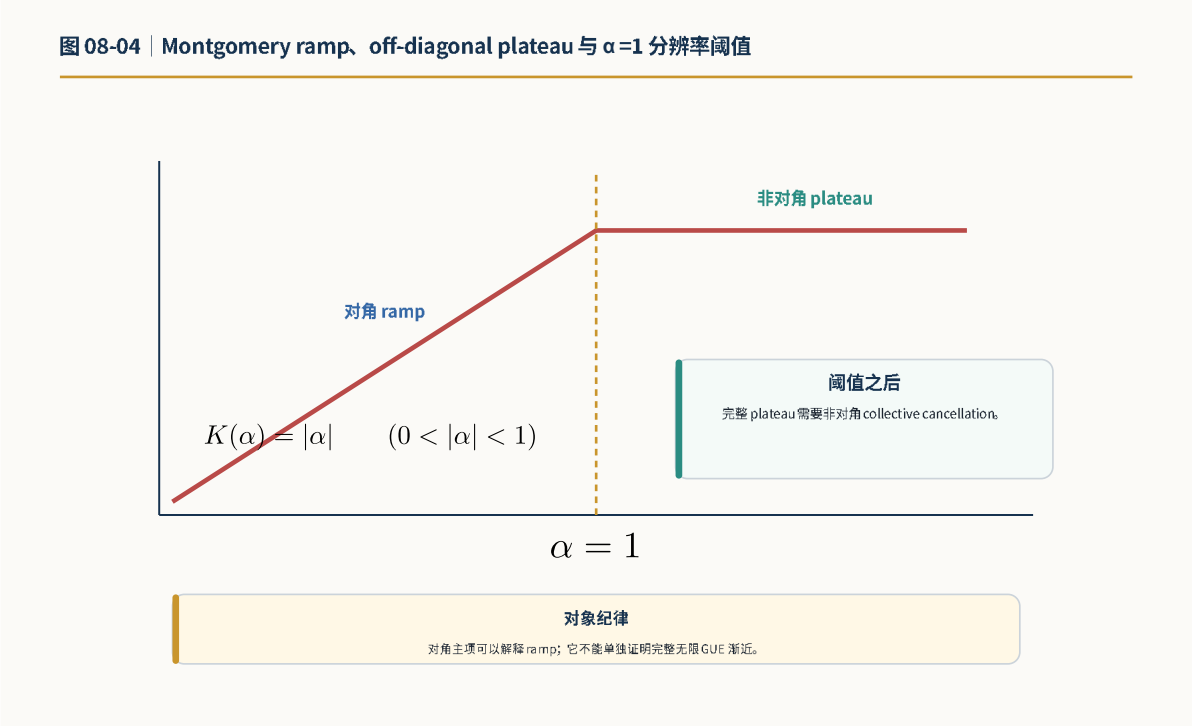


图 08-04　Ramp、plateau 与 $\alpha=1$。在 $0<|\alpha|<1$ 区间，Montgomery 的经典二点形状给出 ramp $K(\alpha)=|\alpha|$，其主导来源可由对角结构解释；到 $\alpha=1$ 以后，完整 plateau 依赖非对角 collective cancellation。因而“得到 ramp”不等于“已经得到完整无限 GUE 渐近”。

11. Plateau 的算术形式与连通二阶项

裸乘积

$$\Lambda(n)\Lambda(n+h) \tag{11.1}$$

含有大量一阶平均信息。写

$$a(n)=\Lambda(n)-1, \tag{11.2}$$

则

$$\Lambda(n)\Lambda(n+h)=1+a(n)+a(n+h)+a(n)a(n+h). \tag{11.3}$$

前三项都由一阶平均结构控制，真正新增的是

$$\boxed{a(n)a(n+h).} \tag{11.4}$$

进一步扣除 Hardy–Littlewood singular-series model（奇异级数模型）的可预测部分后，留下的才是 connected second-order 残差（连通二阶残差）。相应的动态算术目标可写成核加权形式

$$\sum_{h,n}[(\Lambda(n)-1)(\Lambda(n+h)-1)-(\mathfrak{S}(h)-1)]\,K_{T,\alpha}(n,h)=o(T\log T). \tag{11.5}$$

该式代表经典 plateau specialization 所需的一类动态中心化算术控制，不属于本章的结构握手定理。

12. Goldston–Montgomery 桥与短区间素数方差

定义短区间 centered Chebyshev variance 的典型尺度

$$V(X,H)\sim HX\log\frac{X}{H}. \tag{12.1}$$

Goldston–Montgomery 的经典工作说明，在 RH 下，适当参数区间中的 strong 二点相关与相应 primes-in-short-interval variance（短区间素数方差）渐近具有等价关系。

一种方便的离散三角核形式可写为

$$V(X,H)=\sum_{m,n}(\Lambda(m)-1)(\Lambda(n)-1)(H-|m-n|)_+. \tag{12.2}$$

于是形成概念链：

$$\boxed{\text{GUE 二点相关} \Leftrightarrow \text{short-interval variance} \Leftrightarrow \text{centered 平移 Mangoldt 相关.}} \tag{12.3}$$

这一步表明：若进一步追求经典无限 GUE asymptotic，其新增的算术要求并非由本章的谱表示人为产生，而正落在经典二点相关理论的二阶算术核心。

13. 一阶自伴结构与 GUE 二阶律的非等价性

一个自伴谱可以具有完全不同的局部统计：Poisson、clock-like、GOE、GUE 等都可能出现在不同系统中。因此

$$H=H^* \tag{13.1}$$

只保证谱为实数，不决定二点相关核。

同理，乘法 dilation 的酉相位（酉相位）只固定频率坐标，并不自动产生 sine kernel。

因此本章正式冻结：

$$\boxed{\text{HP 自伴性 + horizon 相位不足以推出 GUE.}} \tag{13.2}$$

因此不能因为“GUE 是厄米矩阵的统计”就从 self-adjoint Hilbert–Pólya 实现直接推出 GUE。

14. 低一阶均值与二阶 plateau 的非等价性

一种较低一阶生成源 model 使用带 $\Lambda(n)/\log n$ 的 Dirichlet polynomial；尺度微分在形式上可恢复 $\Lambda(n)$ 层。但关键问题仍在 remainder（余项）的尺度正则性。

设低一阶 covariance 的余项满足

$$|E_T(L_1,L_2)|\le\mathcal{E}_T. \tag{14.1}$$

以尺度步长 Δ 做二阶有限差分恢复 mixed curvature 时，误差会被约放大为

$$\frac{L^4}{\Delta^2}\mathcal{E}_T. \tag{14.2}$$

要低于 Λ-层自然主尺度，需要显著强于现有低一阶 theorem 的尺度正则性。

因此：

> “把已有 lower-order theorem 微分一下即可得到完整 GUE plateau”.
>
> (14.3)

真正需要的是余项在尺度方向上的

$$\boxed{C^{1,1}\text{-type mixed-curvature control.}} \tag{14.4}$$

Heap 关于长 Dirichlet polynomials 的结果从另一侧印证了这一点：在较低一阶权重上可以获得很强控制，但进入对数导数 / Λ 层时，Montgomery 型二点相关信息重新出现。

15. 函数方程与对偶对角主项

考虑 ratio 系数 s（比值系数）

$$I_{\alpha,\gamma}(s)=\frac{\zeta(s+\alpha)}{\zeta(s+\gamma)}=\sum_{n\geq 1}\frac{I_{\alpha,\gamma}(n)}{n^s}. \tag{15.1}$$

在参数原点有

$$-\partial_\alpha I_{\alpha,\gamma}(n)\big|_{\alpha=\gamma=0}=\Lambda(n). \tag{15.2}$$

Conrey–Keating 类型的长 Dirichlet polynomial / ratios 分析显示：在适当模型或 uniform correlation input 下，非对角的变换可以与同一 ζ 函数方程产生的 dual 对角对上。

这给出了一个非常重要的结构判断：

> plateau 的正确主项并不神秘； 它已经作为同一 ζ 身份的 dual 对角出现。
>
> (15.3)

真正未关闭的是“真实自相关是否可以无损转移到这一 dual 对角”。

15.1 一阶反自对偶与二阶自对偶

还可以排除一个潜在的结构障碍：**raising（系数提升/求导）与 one-swap duality 的兼容性。**

把 one-swap duality 写成

$$(\mathcal{D}_Q f)(a,b)=Q^{-a-b}f(-b,-a),\qquad \ell=\log Q. \tag{15.6}$$

则

$$\boxed{\mathcal{D}_Q^2=I.} \tag{15.7}$$

普通导数不与 $\mathcal{D}_Q$ 交换，因为

$$\partial_a\mathcal{D}_Q=-\mathcal{D}_Q(\partial_b+\ell). \tag{15.8}$$

但引入 half-conductor 联络（半导体/导体连接项）

$$\boxed{\nabla_a=\partial_a+\frac{1}{2}\log Q,\qquad \nabla_b=\partial_b+\frac{1}{2}\log Q,} \tag{15.9}$$

以后，得到精确 intertwining（交织）

$$\boxed{\nabla_a\mathcal{D}_Q=-\mathcal{D}_Q\nabla_b,\qquad \nabla_b\mathcal{D}_Q=-\mathcal{D}_Q\nabla_a,} \tag{15.10}$$

以及二阶恒等式

$$\boxed{\nabla_a \nabla_b \mathcal{D}_Q = \mathcal{D}_Q \nabla_a \nabla_b.} \tag{15.11}$$

换到

$$u = (a+b)/2, \qquad v = (a-b)/2, \tag{15.12}$$

并作自然 gauge 后，one-swap 退化为普通反射 $u \mapsto -u$。因此：

一阶完成乘法读数是反自对偶； 二阶自身相关是自对偶。

(15.13)

这解释了使用完成对数导数（完成化对数导数）：Archimedean / conductor 项不是外加修补，而正是使 raising 对自对偶 ity 协变的联络。

因此 raising 与 duality 的模型/代数兼容性不再构成障碍。若追求经典无限 GUE asymptotic，进一步的分析集中在实际 average 的一致余项。

16. 经典无限 GUE 渐近的算术强化：Actual-to-Dual Diagonal Transfer

前面的精确 pair calculus、生成源自身相关与有限尺度握手并不要求先证明经典无限 GUE plateau。若进一步追问标准 Montgomery–GUE 的无限高度渐近，则会遇到一个更强的算术问题。

在 ratios / 函数方程语言中，完成函数方程已经给出 dual 对角应当具有的主结构。需要额外控制的是：真实平移自身相关在动态微观尺度上，是否以足够统一的余项落到这一 dual 对角。

一个典型目标可写为

$$\mathcal{R}_{\mathrm{DC}}(X,H) = o\left(HX\log\frac{X}{H}\right), \tag{16.1}$$

或在尺度坐标中写成相应 mixed-curvature remainder estimate。

这一问题与 strong 二点相关 / short-interval prime variance 的经典困难处于同一二阶算术层。本章保留它，是为了说明经典无限 GUE asymptotic 的算术内容在哪里，而是把它明确归入经典无限 GUE asymptotic 的额外算术要求。

因此区分：

$$\boxed{\text{structural / 有限尺度握手}}$$

与

$$\boxed{\text{经典无限 GUE asymptotic specialization.}}$$

前者是本章主体；后者是对 $\varepsilon_{\mathrm{ren}}$ 极限行为施加的更强渐近要求。

17. Ratios 方法与经典 GUE 渐近的高阶算术坐标

Conrey–Snaith 的 ratios 方法表明：在 ratios 猜想输入下，可以系统得到 ζ 零点的 n-correlation 及 lower-order terms；同样的方法在 $U(N)$ 上给出结构相同的随机矩阵表达。

Conrey–Keating 则证明 ratios 猜想与某类 arithmetic 系数-correlation conjecture 导向同一个结果。这说明

$$\boxed{\text{随机矩阵 expression} \quad \text{与} \quad \text{算术系数相关}} \tag{17.1}$$

确实是同一结构的两种坐标。

但 uniform ratios remainder 承载的是实质性的二阶算术信息，而不是普通复分析中的形式小误差。最新的强结果甚至显示，足够 uniform 的二比二 ζ-ratios 输入可以推出固定差素数对的 Hardy–Littlewood 渐近。因此：

> “只要有形式上的比值解析性，就能自动得到 plateau”.
>
> (17.2)

更准确地说，比值解析性提供强大的自动微分与组织坐标，但经典 plateau 仍要求真正携带二阶算术信息的一致余项。

18. ζ–GUE 双边迁移接口

若直接写

$$\zeta \overset{?}{=} \text{GUE} \tag{18.1}$$

容易制造错误层级。ζ 是确定的算术对象；GUE 是随机矩阵系综。二者最自然的相接点不是原始源，而是二阶二点观测二点观测商空间。

定义概念性的双边图：

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \zeta\text{生成源} & \xrightarrow{\text{self product}} & \text{比值关系} & \xrightarrow{\text{unfold}} & \mathcal{Q}_{\text{pair}} \\ & & & & \updownarrow\ \mathcal{F} \\ \text{GUE/CUE 生成源} & \xrightarrow{\text{self product}} & \text{相对谱} & \xrightarrow{\text{unfold}} & \mathcal{Q}_{\text{pair}}. \end{array}} \tag{18.2}$$

本章称之为

$$\boxed{\textbf{Multiplicative Self-Relation Migration} \quad \text{（乘法自身关系迁移机制）.}} \tag{18.3}$$

在二点统计层，二点测度与形状因子可通过 Fourier transform 双向互译；但从二点统计一般不能恢复原始生成源，因为 $|\hat{\mu}|^2$ 已经丢失相位（相位）。所以：

> 互逆发生在二阶商空间， 而不是原始源空间。
>
> (18.4)

18.1 ζ 与 CUE/GUE 的联合组织差异

这一点是后半轮讨论最重要的纠正。最初直接比较 ζ 与 GUE 时，会看到明显有限尺度差异（错配）。若只看结果，很容易误以为“ζ 的乘法结构和 GUE 根本不是一回事”。后来的联合组织对照显示，真正差异并不在原始自身关系，而在**两边如何组织全部二点关系**。

CUE 的本征角联合密度包含

$$p(\theta_1,\dots,\theta_N) \propto \prod_{i<j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2, \tag{18.5}$$

即 Vandermonde^2 complete 联合律（Vandermonde 平方完整联合律）。若把这一联合律拿掉，改成独立均匀相位（独立均匀相位），则归一化形状因子是

$$K_{\mathrm{iid}}(\tau) = 1. \tag{18.6}$$

恢复 Haar/CUE 联合律后才得到

$$K_{\mathrm{CUE}}(\tau) = \min(\tau, 1), \tag{18.7}$$

所以

$$\boxed{K_{\mathrm{CUE}} - K_{\mathrm{iid}} = -(1-\tau)_+.} \tag{18.8}$$

也就是说，CUE/GUE 的 ramp/repulsion 不是自身积恒等式自动产生的，而来自其预先给定的完整联合概率律。

ζ 一侧完全不同。它没有一个人为指定的 ensemble 联合律；其二阶结构来自 $\Lambda(n)$ 在整数乘法世界中的 deterministic placement（确定性安放）。若打乱 $\Lambda(n)$ 的位置而保持一阶权重分布不变，非对角修正在有限尺度计算中几乎消失；重新按素数局部 congruence（素数局部同余）逐层加入 Hardy–Littlewood 奇异级数（奇异级数）因子，真实修正又被逐步恢复。

因此两边的差异可写成：

CUE/GUE	ζ
原始自身关系: $z_i z_j^{-1}$	原始自身关系: m/n
product over pairs	product over primes
Vandermonde^2 complete 联合律	Euler/局部同余 law
系综概率	确定性算术位置
全局联合律在定义时已给定	全局排列从整数算术中生成

所以：

两边没有在乘法身份上分叉， 而是在“怎样组织同一个自身关系的全部联合关系”这一层分叉。

(18.9)

这就是第一版握手“握不上”的根本结构原因。它也解释了迁移不能简单做成“ζ 减一个常数”；先把生成源特有的局部组织（源特有局部组织）从普适二点结构（普适二点结构）中分离出来。

19. 重整化迁移坐标与有限尺度残差

在共同二点观测坐标中，把 ζ 侧写成

$$\mathcal{C}_\zeta = \mathcal{C}_{\mathrm{ref}} + \Delta_{\mathrm{native}}, \tag{19.1}$$

其中 $\mathcal{C}_{\mathrm{ref}}$ 是选定的 finite-CUE / bulk reference coordinate，Δ_{native} 汇集尚未被独立修正映射消去的生成源特有的有限尺度 structure。

这里的 Δ_{native} 定义为：

$$\boxed{\text{在给定重整化规则下的有限尺度形变坐标.}} \tag{19.2}$$

若讨论经典无限 GUE limit，才额外询问该坐标在相应归一化下是否趋于零。若它保留可识别的 arithmetic lower-order structure，也应作为 arithmetic deformation 继续记录，而不是通过事后常数强行抹除。

因此本章从这里开始把“误差”语言改成“修正 / deformation / 残差观测”语言：数值差异必须先知道自己属于哪一种有限尺度结构，才有资格参与极限判断。

20. 无拟合迁移：ζ 局部结构的独立扣除

定义无拟合迁移算子

$$\boxed{\mathfrak{M}_T: K_\zeta^{\text{原始}} \mapsto K_\zeta^{\text{原始}} - K_\zeta^{\text{local}} + K_{\text{GUE}}.} \tag{20.1}$$

在 plateau normalization 下 $K_{\text{GUE}} = 1$。故

$$K_{\text{mig}} - 1 = K_\zeta^{\text{原始}} - K_\zeta^{\text{local}}. \tag{20.2}$$

这里 K_ζ^{local} 只使用 ζ 自己的直接项/Euler/奇异级数局部结构；GUE 只提供普适坐标基准。该修正项完全由 ζ 侧自身的局部结构定义。

20.1 原始（RAW）数据重整：12 组对照

有限尺度计算给出：

$$\text{原始平均误差} = 0.147475, \tag{20.3}$$

完整 singular-series migration 后

$$\text{平均误差} = 0.0151165, \tag{20.4}$$

平均误差降低

$$\boxed{89.75\%}, \tag{20.5}$$

中位改善约

$$7.93\times. \tag{20.6}$$

采用与当前分辨率一致、预先规定的有限 Euler cutoff

$$p \le H \tag{20.7}$$

后，平均误差进一步降至

$$0.0135793, \tag{20.8}$$

相对原始降低

$$\boxed{90.79\%}, \tag{20.9}$$

中位改善约

$$11.91\times. \tag{20.10}$$

部分样本：

X, θ, H	原始K	原始误差	迁移后K	迁移后误差	改善倍数
16384,	0.799617	0.200383	1.00304	0.003037	65.98×
26214	0.872484	0.127516	0.997233	0.002767	46.09×
52428	0.861196	0.138804	0.998442	0.001558	89.08×
52428	0.888907	0.111093	1.01283	0.012833	8.66×

这些数据表明局部表示修正解释了大部分有限尺度差异；$\Delta_T \to 0$ 属于独立的无限尺度渐近命题。

20.2 乘法自身关系迁移的四步定义

为了把“迁移”从一句话变成可核对的数学操作，本章把两侧都拆成同样的四步。

对任意离散源测度 μ，先定义自身关系

$$\mathcal{R}[\mu] = \mu * \tilde{\mu}. ag20.11$$

若定义等价关系

$$\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow \mathcal{R}[\mu_1] = \mathcal{R}[\mu_2], ag20.12$$

则得到自身相关商空间（自身关系商空间）

$$\boxed{\mathcal{Q} = \{\text{生成源}\}/\sim.}\, ag20.13$$

进入这一商空间后，原始生成源的全部信息不再保留；比较只针对其二阶自身关系。

ζ 侧： 从

$$\nu_\zeta = \sum_n a_n \, \delta_{\log n} ag20.14$$

出发：

1. 自身积：$\mathcal{R}_\zeta = \nu_\zeta * \tilde{\nu}_\zeta$；
2. unfold：把 $\log(m/n)$ 缩放成 $u = T\log(m/n)$；
3. Mellin/Fourier projection：有限窗口核

$$K_B^{\times}(m,n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} (m/n)^{it}\, dtag20.15$$

在微观归一化后进入 sine/Fejér 型投影；

4. renormalize：扣除对角与能够由 ζ 自身 Euler/singular-series 解释的 local part，留下 connected arithmetic 二点观测 $\mathcal{C}_\zeta$。

GUE/CUE 侧： 从角谱/本征值测度出发，同样做自身积、unfold、Fourier projection，并扣除对角/background，得到 $\mathcal{C}_U$。bulk 极限为

$$\mathcal{C}_U(u) = -\left(\frac{\sin\pi u}{\pi u}\right)^2 . ag20.16$$

所以握手条件不是“ζ=GUE”，而是

$$\boxed{\mathcal{C}_\zeta \to \mathcal{C}_U \quad \text{in} \mathcal{Q}_{\text{pair}}.}\, ag20.17$$

二点测度与形状因子之间的 Fourier 变换可以双向互译；但从

$$\widehat{\mu * \tilde{\mu}} = |\hat{\mu}|^2 ag20.18$$

一般不能恢复 $\hat{\mu}$ 的相位。因此：

ζ与 GUE 可以在二阶自身关系商空间上互逆，　不能在原始源空间上互逆。 $ag20.19$

这正是迁移机制的价值：**不让 ζ 去服从 GUE，也不让 GUE 反过来解释全部素数；双方只在同一个二阶观测量层握手。**

20.3 两侧联合组织的正反对照

为了检查两侧修正到底来自哪里，本章采用结构拆除式正反对照。

CUE 侧阳性/阴性对照： 去掉 Vandermonde^2 联合律、换成独立均匀相位后，ramp 结构消失；恢复 Haar/CUE 联合律以后才回到 $\min(\tau, 1)$。这验证了：随机矩阵侧真正新增的是完整联合律，而不是自身积本身。

ζ 侧阳性/阴性对照： 打乱 $\Lambda(n)$ 的位置、保留相同的一阶权重直方图后，非对角修正接近消失；按素数局部 factor 逐步恢复以后修正逐层回归。

一个代表性样本为

$$X = 524288, \qquad \theta = 0.45. ag20.20$$

真实非对角修正约为

$$-0.842425. ag20.21$$

只保留 $p = 2$ 的局部因子时约为

$$-0.1380, ag20.22$$

累积到

$$p \le 31: \quad -0.6903, ag20.23$$

到

$$p \le 101: \quad -0.7979, ag20.24$$

到

$$p \le 199: \quad -0.83675. ag20.25$$

这给出非常直观的数值事实：**ζ 的主要二阶修正的确是素数局部因子一层层累积出来的。**

在 12 组 (X, H) 测试中，扣除 full Hardy–Littlewood local model 后，残差相对于实际修正的中位比例约为

$$1.95\%, ag20.26$$

相对于 modeled 修正的中位比例约为

$$1.91\%, ag20.27$$

最大约为

$$3.70\%. ag20.28$$

这说明有限尺度下主要结构已经被 local arithmetic organization 捕获，剩余项才是 global deterministic placement（全局确定性排列）的候选残差。

20.4 有限 Euler 分辨率

进一步的分辨率核对没有强制使用完整无限 singular series，而是给 Euler product 设置有限 cutoff P，对 12 组样本观察最合适的分辨率。事后最优值满足经验关系

$$\text{median}\frac{P_*}{H} \approx 1.33. ag20.29$$

即最佳 local Euler resolution 常在

$$P \sim Hag20.30$$

量级。

在这一纯数值诊断中，最佳 truncated model 的中位失配约为

$$9.6 \times 10^{-5}, ag20.31$$

而 full in 有限 singular-series model 的中位失配约为

$$1.56 \times 10^{-2}. ag20.32$$

由于 P_* 来自事后选择，该结果只作为有限分辨率诊断；其结构含义为：

一部分残差可能只是把“无限 Euler 完成化” 提前套在有限分辨率窗口上造成的有限分辨率差异。 $ag20.33$

因此迁移采用预先固定的自然 cutoff $p \leq H$，而不使用事后最优 P_*。

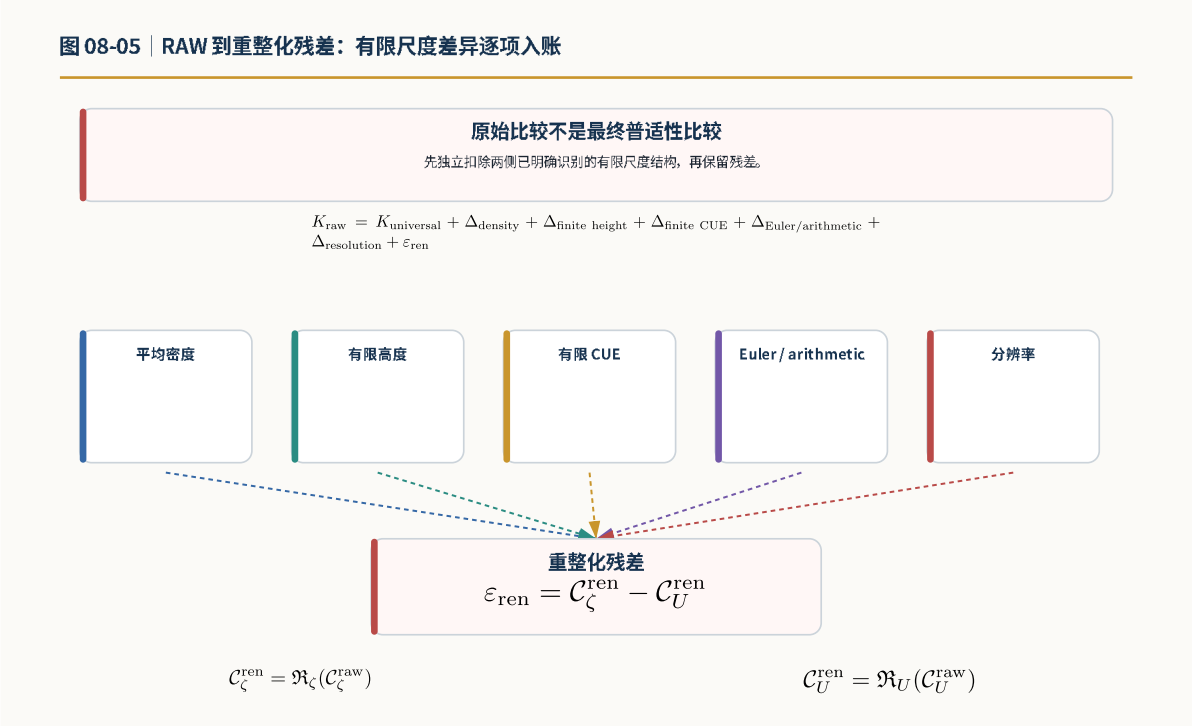


图 08-05　RAW 到重整化残差。 原始 ζ–CUE/GUE 差异被分解为平均密度、有限高度、有限 CUE、Euler/arithmetic 与分辨率等独立定义的有限尺度修正，最后剩余 $\varepsilon_{\mathrm{ren}}$。这一残差被完整保留，不通过事后常数拟合强迫为零；因此重整化比较既提取共同结构，也保留生成源特有差异。

21. 高尺度残差的窗口稳定性

固定有限分辨率 Euler rule 后定义

$$\boxed{\Delta_{X,\theta} = K_{\text{原始}} - K_{\mathrm{local}}^{p\le H}, \qquad H = \lfloor X^{\theta} \rfloor.} \tag{21.1}$$

将 X 推至 2^{23} 并增加 quarter-octave、平滑窗口、移动窗口与非重叠窗口后，计算观察到：

1. 残差具有多次符号变化；
2. 高尺度平均出现明显负偏；
3. 硬截断换成 Hann 平滑后振荡仍存在；
4. 移动窗口和非重叠窗口仍保留显著偏差；
5. 数据既不支持“已明显单调趋零”，也不足以证明“趋向固定非零常数”。

quarter-octave 网格的 mean absolute 残差为

$$\theta = .35\colon\ 0.01422, \qquad \theta = .45\colon\ 0.01963, \qquad \theta = .50\colon\ 0.03143. \tag{21.2}$$

在较高 octave 上，平均残差约为

$$-0.02334, \qquad -0.03795, \qquad -0.05493, \tag{21.3}$$

而在 $X = 2^{23}$ 的单点读数约为

$$-0.02090, \qquad -0.02460, \qquad -0.04583. \tag{21.4}$$

因此有限尺度核对给出的直接观察是：

存在有符号、尺度相关、带算术振荡的有限尺度残差.

(21.5)

现有有限区间本身不用于定义或强制某个最终极限；这些残差被完整保留为有限尺度数据。

21.1 不同窗口下的高尺度对照

为区分真实有限尺度残差与硬截断边界效应，本章采用四类窗口作稳定性对照。

（a）Quarter-octave 网格

在

$$2^{19} \le X \le 2^{23} \tag{21.6}$$

每 $1/4$ octave 取一点，共 17 个尺度。三个方向 $\theta = .35, .45, .50$ 的平均绝对残差分别为

$$0.01422, \qquad 0.01963, \qquad 0.03143, \tag{21.7}$$

且三个序列分别发生 2、3、4 次符号变化。它因此不是一个简单的正尾项单调下降过程。

（b）Hann 平滑窗

为了排除 hard 二进尺度 boundary，改用 Hann window 后，$\theta = .45$ 的代表序列仍为

$$0.02856,\ 0.02011,\ 0.02085,\ -0.06965,\ -0.00789 \tag{21.8}$$

对应 $X = 2^{19}, 2^{20}, 2^{21}, 2^{22}, 2^{23}$。因此“残差主要来自硬窗口边界”的解释被数值否定。

（c）移动平滑窗口

高尺度 upper-high 区域的窗口平均为

$$\theta = .35:\ -0.02867, \qquad \theta = .45:\ -0.05718, \qquad \theta = .50:\ -0.07673. \tag{21.9}$$

（d）非重叠窗口

为避免重叠窗口造成伪稳定，仅取互不重叠窗口时，平均仍为

$$\theta = .35:\ -0.03410, \qquad \theta = .45:\ -0.05947, \qquad \theta = .50:\ -0.07285. \tag{21.10}$$

同时单窗口波动依旧很大，例如 $\theta = .45$ 可落在约

$$-0.12095 \le \Delta \le 0.01734, \tag{21.11}$$

而 $\theta = .50$ 可到

$$-0.16546 \le \Delta \le 0.04957. \tag{21.12}$$

这些结果共同说明：剩余残差不是一个可以通过换窗口轻易抹掉的伪影；但它也没有显示出足以证明非零常数极限的稳定性。

一种与现有有限尺度数据相容的经验描述是

$$\Delta_T = A(T) + \varepsilon_T, \qquad A(T) \to 0, \tag{21.13}$$

其中慢衰减背景与当前尺度仍然显著的算术振荡叠加。这些数据只承担有限尺度诊断功能，不用于把某个具体衰减律写入本章主定理。

22. 有限尺度差异的八类分项

这是本章最重要的误差解释部分。所谓“ζ 与 GUE 的差”并非单一来源。讨论后期的关键认识是：**如果不把不同层级的差异分账，任何“误差趋零/不趋零”的判断都没有确定含义。**

22.1 一阶对象与二阶自身关系

HP 与 Guinand–Weil 已经给出完整的一点谱/一点算术接口，但 GUE 要求的是 $\mu \otimes \mu$。这意味着从一阶到二阶本身就新增 connected covariance（连通协方差）；不能把“一点谱已经握上”误解成“二点统计也应自动握上”。

22.2 两侧的联合组织方式

CUE/GUE 在定义层直接给出 Vandermonde^2 complete 联合律；ζ 则由 Euler/local congruence 与整数的 global deterministic placement 共同生成。二者原始自身关系同型，但生成源特有的 joint organization 不同。这是迁移前最大的结构差异。

22.3 平均密度修正

若展开归一化采用有限阶 $\bar{N}(T)$ 而不是更完整的局部平滑密度，低阶 density curvature（密度曲率）会混入局部间距统计。

22.4 有限高度与无限高度

Riemann 零点在有限高度 T 的局部统计含有 arithmetic lower-order terms（算术低阶项）；无限 GUE/sine process 则是极限对象。直接比较

$$\zeta_{\text{finite height}} \quad 与 \quad \mathrm{GUE}_{\infty} \tag{22.1}$$

本来就会产生系统性 model 差异（模型错配）。

22.5 有限 CUE 尺寸与无限 sine kernel

随机矩阵一侧也有有限 N 修正。因此有限 zeta 高度更自然的比较对象是某个 effective-size CUE，而非立即取 $N = \infty$。

22.6 算术 Euler 修正与有限 Euler 分辨率

ζ 一侧含 Euler 因子、prime powers 与 singular-series 型 lower-order structure；这些结构在 universal sine-kernel limit 中被商空间掉，但在有限尺度仍然可见。进一步地，有限窗口只能解析到有限 prime scale；若过早套用 in 有限 Euler 完成化，本身也会制造有限分辨率差异。

22.7 生成源分辨率差异

内部 prime-生成源变量使用

$$T_{\mathrm{prime}} = X/H, \tag{22.2}$$

而外部零点统计高度使用

$$T_{\mathrm{zero}} = \gamma. \tag{22.3}$$

两者不是同一个有限尺度变量。因此外部 gap-ratio 的衰减指数不能直接拷贝给内部 $\Delta_{X,\theta}^{\mathrm{prime}}$。

22.8 重整化连通残差

在前述修正分账以后，剩余项定义为

$$\boxed{\varepsilon_T^{\mathrm{ren}}} \tag{22.4}$$

或重整化 migration 残差（重整化迁移缺陷）。它记录给定重整化规则下仍然可见的 connected 有限尺度 structure；若另行讨论经典无限 GUE asymptotic，其极限行为才成为额外的渐近判据。

23. 事后常数拟合与独立修正项

有限区间中，模型

$$\Delta_T \approx \Delta_\infty + \frac{c}{\log T} \tag{23.1}$$

可能比纯 $c/\log T$ 拟合更好，但计算显示拟出的 Δ_∞ 对窗口、θ 以及使用 $1/\log^k T$ 的阶数高度敏感。

因此：

$$\boxed{\text{把有限区间慢漂移拟合成常数，　再人工减掉使}\zeta = \mathrm{GUE}.} \tag{23.2}$$

原因不是“拟合不好看”，而是这种常数没有独立定义，等于把目标答案写进修正（修正项）。它可用于作图校准，不能进入证明链。

24. 有限高度校准：有限 ζ 与有限 CUE

外部随机矩阵讨论提供了重要的模型校准。Nishigaki 2024 给出 GUE 极限的相邻间距与 gap-ratio 分布，并将高位 Riemann 零点作为趋向随机矩阵统计的样例；Nishigaki 2026（2025 年预印本）进一步讨论有限 N CUE 修正 s（有限尺寸 CUE 修正），指出 gap-ratio 相对于 sine-kernel 极限具有特殊的有限尺寸抵消结构，并解释 Riemann 零点 gap-ratio 偏差为何呈现约 $(\log(T/2\pi))^{-3}$ 的高度衰减。

对公开有限高度数据的独立复算中，四个高度样本直接对无限 GUE 的平均差约为

$$2.2233 \times 10^{-3}, \tag{24.1}$$

加入独立有限高度修正后，残差约降为

$$4.9167 \times 10^{-5}, \tag{24.2}$$

即平均解释约

$$\boxed{97.79\%} \tag{24.3}$$

的有限高度表观偏差，中位改善约 $68.1\times$。

这里的数值复原用于检验有限高度 model 是否解释已观测偏差；它不是用有限数据替代无限高度渐近定理。

由此得到有限高度层的模型关系：

> 有限高度 ζ 与无限 GUE 的显著差异， 有相当一部分本来就是可计算、可衰减的有限高度 /model difference.
>
> (24.4)

24.1 四点复原与衰减律比较

对公开的四个独立高度点，直接与无限 GUE 比较、再加入独立有限高度修正后得到：

零点序号附近	直接对无限 GUE 的误差	有限高度修正后残余	改善倍数
10^8	3.4853×10^{-3}	1.1435×10^{-4}	$30.5\times$
10^9	2.4424×10^{-3}	2.3092×10^{-5}	$105.8\times$
10^{10}	1.6882×10^{-3}	9.2966×10^{-6}	$181.6\times$
1.037×10^{11}	1.2773×10^{-3}	4.9934×10^{-5}	$25.6\times$

平均误差因此由

$$2.2233\times10^{-3} \tag{24.5}$$

降至

$$4.9167\times10^{-5}, \tag{24.6}$$

即约

$$\boxed{97.79\%} \tag{24.7}$$

的有限高度表观差异被解释，中位改善约 $68.1\times$。

对四个 gap-ratio 矩做独立幂律复原，得到指数

$$p_1=2.9080,\qquad p_2=2.8778,\qquad p_3=2.8868,\qquad p_4=2.9009. \tag{24.8}$$

它们聚集在 $p\simeq2.9$ 附近。对第一矩比较 $1/\log T$、$1/\log^2 T$、$1/\log^3 T$ 时，代表性 RMSE 约为

$$5.74\times10^{-4},\quad 3.06\times10^{-4},\quad 5.40\times10^{-5}, \tag{24.9}$$

因此这一观测量的外部有限高度数据明显更支持近 $\log^{-3}T$ 的衰减，而不是固定非零残差。

这项复原很重要，但它不能被搬用成内部 prime-生成源 $\Delta_{X,\theta}^{\mathrm{prime}}$ 的衰减定律，因为二者的有限尺度变量不同；第 25 节专门保留这一边界。

25. 两类有限尺度残差的对象区分

内部 prime-生成源有限尺度计算定义

$$\boxed{\Delta_{X,\theta}^{\mathrm{prime}}=K_{\text{原始}}-K_{\mathrm{Euler}}^{p\le H}.} \tag{25.1}$$

外部零点统计则自然定义

$$\boxed{\Delta_T^{\mathrm{zero}} = K_{\mathrm{zero}}^{\mathrm{obs}} - K_{\mathrm{GUE}}^{\infty}.} \tag{25.2}$$

这两者虽然沿同一“乘法自身关系 → 零点二点统计”链相连，但有限尺度变量、窗口与观测量均不同。因此：

$$\boxed{\Delta_T^{\mathrm{zero}} \sim \log^{-3} T \quad \not\Rightarrow \quad \Delta_{X,\theta}^{\mathrm{prime}} \sim \log^{-3}(X/H).} \tag{25.3}$$

这正解释了内部高尺度残差未呈现外部 gap-ratio 的同一个幂律。

26. 有限到有限的重整化接口与普适商空间

第一版握手直接把 ζ 的有限数据迁移到无限 GUE baseline。经过外部校准后，更严格的结构应当是：

$$\boxed{K_\zeta(T) = K_{\mathrm{GUE}}^{(\infty)} + K_{\mathrm{finite}}(T) + \varepsilon_T.} \tag{26.1}$$

更细地，可把有限高度 Riemann-zero 观测量写成结构展开

$$K_{\mathrm{RZ}}(T) = K_{\sin} + \frac{1}{N_e(T)^2} K_2 + \frac{1}{N_e(T)^3} K_{3,\mathrm{arith}} + \cdots, \tag{26.2}$$

其中 $N_e(T)$ 是与高度相匹配的有效 CUE 尺寸（有效 CUE 尺寸）；具体修正的阶数依观测量而异，不能把 (26.2) 当作所有统计量的统一逐项公式。

因此最终 handshake（握手）定义为：

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \zeta_{\text{原始}} & \to & \zeta_{\text{finite corrected}} & \to & \mathcal{Q}_{\text{universal}} \\ & & & & \updownarrow \\ \mathrm{CUE}_N & \to & \mathrm{CUE}/\mathrm{GUE}_\infty & \to & \mathcal{Q}_{\text{universal}}. \end{array}} \tag{26.3}$$

其原则是：

$$\boxed{\textbf{有限}\zeta\textbf{对有限 CUE；} \quad \textbf{极限}\zeta\textbf{再对无限 GUE.}} \tag{26.4}$$

该结构满足三项对象条件：

1. 不要求有限高度算术对象提前拥有无限随机矩阵极限；
2. 两边各自承担自己的有限尺寸 / 有限高度修正；
3. 只有经过独立修正后仍留下的残差才进入最终普适性比较。



图 08-06　有限到有限的握手。有限高度的 ζ 观测先承担自己的 density、finite-height 与 arithmetic 修正，有限 CUE 也先承担自己的 finite-size 修正；双方完成各自原生修正后，才进入共同的二点比较商空间 $\mathcal{Q}_{\mathrm{pair}}$。因此本章的比较原则是“有限 ζ 对有限 CUE；极限 ζ 再对无限 GUE”。

27. 重整化握手定理：结构接口与渐近特化

定义 ζ 侧的独立定义的修正算子

$$\mathfrak{R}_\zeta$$

以及随机矩阵侧的有限尺寸修正算子

$$\mathfrak{R}_U.$$

它们分别处理各自原生坐标中已经明确识别的有限尺度结构，例如：

$$\Delta_{\mathrm{density}},\quad \Delta_{\mathrm{finite\ height}},\quad \Delta_{\mathrm{finite\ CUE}},\quad \Delta_{\mathrm{Euler/arithmetic}},\quad \Delta_{\mathrm{resolution}}.$$

定义重整化二点观测

$$\mathcal{C}_\zeta^{\mathrm{ren}} = \mathfrak{R}_\zeta(\mathcal{C}_\zeta^{\text{原始}}), \tag{27.1}$$

$$\mathcal{C}_U^{\mathrm{ren}} = \mathfrak{R}_U(\mathcal{C}_U^{\text{原始}}). \tag{27.2}$$

再定义

$$\boxed{\varepsilon_{\mathrm{ren}} = \mathcal{C}_\zeta^{\mathrm{ren}} - \mathcal{C}_U^{\mathrm{ren}}.} \tag{27.3}$$

定理 27.1（重整化握手结构）

在本章的二点观测框架中：

1. ζ 与 CUE/GUE 两侧各自的自身积、展开归一化、Fourier projection 与修正映射均在各自各自生成源上定义；

2. 双方经这些映射后进入同一个二点观测 comparison space Q_{pair}；

3. 原始（RAW） 差异被精确分解为已声明修正坐标与 $\varepsilon_{\mathrm{ren}}$；

4. $\varepsilon_{\mathrm{ren}}$ 是该重整化方案下保留的生成源特有的残差观测，并被完整保留；

5. 结构握手与 $\varepsilon_{\mathrm{ren}}$ 的无限尺度极限属于两个层级。

因此本章所谓“握手完成”是：

$$\boxed{\text{双方拥有同型的二阶对象、共同的比较空间、 明确的独立修正映射与完整的残差账本.}} \tag{27.4}$$

它不是把有限 ζ 强迫成无限 GUE 的逐点等式。

27.2 经典无限 GUE 渐近特化

若在一族尺度 $T \to \infty$ 上进一步证明

$$\boxed{\langle \varepsilon_{\mathrm{ren}}(T), \Phi \rangle \to 0} \tag{27.5}$$

对允许的全部 pair test 观测量 s Φ 成立，则得到相应观测量 class 中的经典无限 GUE / sine-kernel asymptotic。

因此：

$$\boxed{\text{经典 GUE asymptotic} = \text{重整化 handshake} + \text{vanishing-残差 specialization.}} \tag{27.6}$$

(27.5) 是在结构握手之上的更强渐近命题。

28. 源生成等价 GUE 接口：一阶见证继承二阶统计

第 3.3 节已经证明：只要一个独立源生成（source-generated） Hilbert–Pólya 终端经一阶 Riemann 谱见证认出

$$(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),$$

那么所有由函数演算、迹与 Fourier 二点构造得到的二点对象完全相同。

因此可以直接定义源生成（source-generated） 带符号算子：

$$\mathcal{D}_\times = H_\times \oplus (-H_\times), \qquad \mathcal{M}_\times = M_\times \oplus M_\times. \tag{28.1}$$

其谱振幅

$$Z_{\times,\phi}(u) = \mathrm{Tr}\big[\mathcal{M}_\times \phi(\mathcal{D}_\times) e^{iu\mathcal{D}_\times}\big] \tag{28.2}$$

满足

$$\boxed{Z_{\times,\phi}(u) = Z_{\mathrm{R},\phi}(u).} \tag{28.3}$$

于是

$$\boxed{\mathcal{R}_{\times,\phi} = \mathcal{R}_{\mathrm{R},\phi},} \tag{28.4}$$

其中 $\mathcal{R}$ 表示相应 weighted 二点测度。

因此所有下游对象——展开归一化后的二点相关、形状因子、有限 CUE 比较、重整化迁移坐标——都可以直接写成源生成（source-generated） HP 版本，而不改变任何数值或定理内容。

这给出一个表示无关性结论：

GUE comparison 属于共同谱身份的二阶层， 而不属于某一种一阶谱构造路线。

(28.5)

因此，任何从 multiplication 生成源独立到达同一一阶终端的 HP 实现，都自动具有相同的 GUE interface；无需另建第二套二阶理论。

29. 重整化残差作为二阶数据坐标

本章的原始（RAW） 差异可以按定义与独立修正账本写成

$$\boxed{\Delta_{\text{observed}} = \Delta_{\text{density}} + \Delta_{\text{finite height}} + \Delta_{\text{finite CUE}} + \Delta_{\text{Euler/arithmetic}} + \Delta_{\text{resolution}} + \varepsilon_{\text{ren}}\cdot} \tag{29.1}$$

这个等式的作用不是把最后一项隐藏起来，而是把不同来源的有限尺度差异彻底分账。

前五类修正都有各自明确的对象来源。最后的

$$\boxed{\varepsilon_{\text{ren}}} \tag{29.2}$$

则被完整保留，包括其符号、窗口依赖、尺度振荡与观测量 dependence。

重整化残差的对象地位为：

ε_{ren} 是重整化以后仍在场的二阶数据坐标。

(29.3)

对于保真的有限尺度握手，式 (29.1) 给出完整账本；$\varepsilon_{\text{ren}} = 0$ 属于更强的无限尺度特化。

如果目标进一步升级为经典无限 GUE asymptotic，则才额外讨论

$$\varepsilon_{\text{ren}}(T) \overset{?}{\to} 0$$

在何种测试函数拓扑中成立。这个问题属于更强的极限特化，而不是本章结构握手的定义债务。

在算术坐标中，Actual-to-Dual Diagonal Transfer 提供讨论这一极限的一条路线；在随机矩阵坐标中，有限 CUE 修正提供另一条低阶展开路线。两者都可作用于 ε_{ren}，但不改变本章已经完成的二阶对象与重整化结构。

30. 原始数据重整后的修正规则

一旦 (29.3) 所定义的残差被识别，继续对当前有限尺度 Δ_T 拟合越来越复杂的

$$\frac{c}{\log T}, \quad \frac{c\log\log T}{\log T}, \quad T^{-\eta}\cos(\omega \log T + \phi), \quad \Delta_\infty + \frac{c}{\log T} \tag{30.1}$$

并不会自动增加证明信息。

本章因此采用如下规范：

- 已知有限修正：独立建模并扣除；
- 可验证的生成源-local 修正：独立从 ζ 侧导出；
- 不能独立导出的常数：不用于对齐；

- 剩余残差：保留其符号、尺度、窗口依赖，作为讨论对象；
- 渐近极限：只有解析证明或足够强的外推理论才能定级。

这使有限尺度残差从需要掩盖的“误差”变成了一个有明确来源、明确职责边界、可独立讨论的数学对象。

31. 函数域中的算术—酉矩阵对应

在 function fields（函数域）中，Katz 的 Frobenius equidistribution（Frobenius 等分布）允许把某些算术短区间方差严格转成酉-group matrix integrals（酉群矩阵积分）。Keating–Rudnick 对 prime polynomials（素多项式）短区间方差的结果就是一个典型例子。

因此本章提出的 migration 不是“因为曲线像就说一样”，而是受一个已经成功的严格范式启发：

$$\boxed{\text{arithmetic object} \to \text{酉 conjugacy class} \to \text{Haar matrix statistic.}} \tag{31.1}$$

在整数 ζ 情形，若进一步追求经典无限 GUE asymptotic，需要一种与函数域 Frobenius 几何所承担角色相对应的足够强 global 传递。Actual-to-Dual Diagonal Transfer 是这一更强渐近要求的一种算术表述。

32. 六类逻辑非等价

以下六类逻辑非等价直接固定本章的对象边界。

32.1 自伴性与 GUE 二阶律

$$H_{\mathrm{HP}} = H_{\mathrm{HP}}^{*}$$

只固定实谱，不能决定局部统计类。

32.2 一点迹与二点自身关系

Guinand–Weil 精确线性迹接口不能免费升级到 $\mu \otimes \mu$。二阶新增信息正是平移相关 s。

32.3 对角主项与完整无限 GUE 渐近

ramp 可由对角解释；plateau 需要非对角 collective cancellation（集体抵消）。

32.4 低一阶均值与二阶定理

尺度微分会放大 remainder，需要 mixed-curvature regularity。

32.5 有限 ζ 与无限 GUE

有限高度与有限尺寸修正先入账。

32.6 事后常数对齐与理论定义

任何为了“让结果等于 1”而事后拟合的常数都没有独立算术身份，只能用于图形校准。

33. RH–HP–GUE 三层职责

下表给出本章的核心结构分层。

层级	核心对象	关键自由度/统计量	它回答什么	它不自动回答什么
RH	$\rho = \frac{1}{2} + d_\rho + i\gamma$	横向 d_ρ	是否所有非平凡零点落在临界线	γ_n 这样排列
谱见证	$\mathfrak{W}_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}}$，$\nu_{\mathrm{R}}, (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$	一阶谱身份与解析重数的唯一识别	不同一阶实现何时确实是同一个 Riemann 谱身份	与二点统计或 GUE
HP	H_{id} 或与其酉等价的 $H_{\times}^{\mathrm{HP}}$	实谱 γ_n 与重数显示 M_{mult}	如何把零点身份实现为自伴谱	局部间距为何服从 GUE 二阶律
GUE	展开归一化后的 $\{x_n\}$	二点相关 / 形状因子	γ-谱的局部普适统计	RH 的横向闭合本身
arithmetic 生成源	$\Lambda(n)$，$\Lambda(n)\Lambda(n+h)$	单点/二点乘法响应	谱迹为何从 primes 生成；二点关系怎样回到乘法端	经典 full 非对角 asymptotic 传递
握手层	$\mathcal{Q}_{\mathrm{pair}}$	普适商空间 + 有限尺度 decoration + 残差	ζ 与 GUE/CUE 如何在同层比较	原始生成源的唯一逆恢复

因此本章的职责可以压缩为：

RH 关闭横向； 谱见证认出一阶身份； HP 承载纵向； GUE 描述纵向自身关系； 算术生成源解释这些关系从何而来； 握手层负责在不抹去差异的情况下比较两种二阶表示。

(33.1)

谱见证不是新的物理层，而是一个身份接口：

$$\boxed{\text{one-point 实现} \xrightarrow{\text{谱见证}} \text{common Riemann 谱身份} \rightarrow \text{second-order relation.}} \tag{33.2}$$

若源生成（source-generated） HP 实现 $(H_{\times}, M_{\times})$ 满足

$$(H_{\times}, M_{\times}) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),$$

则二阶见证继承定理立即把全部二点结构传递到 $H_{\times}$ 上。二阶理论因此属于共同的一阶谱身份，而不属于某一特定构造路线。



图 08-07　六层职责分离。 RH 只关闭零点横向自由度；谱见证只负责认出共同的一阶 Riemann 谱身份；Hilbert–Pólya 负责自伴承载纵向谱；GUE 描述展开后的二点/高阶自身关系；算术生成源解释这些关系如何从 prime 侧出现；握手层则在保留 decoration 与 residual 的前提下比较共同二阶结构。任何一层都不能免费替代另一层的证明责任。

34. 重整化接口的严格含义

“握手”不是证明 ζ 与随机矩阵是同一个原始对象，也不是把 arithmetic structure（算术结构）抹成随机性。它表示：

1. 两边各自在自己的原生坐标中构造二阶自身关系；
2. 两边各自完成必要的有限尺度修正；
3. 两边进入同一个展开归一化后的二点观测 space；
4. 在该空间中比较 universal component；
5. 生成源特有的 decoration 与残差被单独保留。

因此：

$$\boxed{\text{握手} = \text{保留差异以后仍能识别共同结构},} \tag{34.1}$$

而不是

$$\boxed{\text{握手} = \text{强迫两边所有有限尺度数据完全相等}.} \tag{34.2}$$

35. 一阶谱与二阶统计的统一结构

结构路径可以分成两条。

第一条是 **Hilbert–Pólya 梦想**：Riemann 零点背后应当存在真正的谱结构，而不是一串偶然出现的复数零点纵坐标。它追问：

$$\boxed{\gamma_n \quad \text{能否作为自然自伴谱出现。}} \tag{35.1}$$

第二条是 **Montgomery–Dyson–Odlyzko 以来的随机矩阵期待**：这些谱频率的局部关系应当与酉随机矩阵 universality 发生深刻对应。它追问：

$$\boxed{\{\gamma_n\} \quad \text{的二点与高阶自身关系为何呈现酉 universality。}} \tag{35.2}$$

这两条期待可以放入同一条分层履历：

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{乘法生成源} \to X \to \text{one-point 谱身份} \to \\ &\text{recognized HP 谱} \to \text{二点迹} \to \\ &\text{prime 自身相关} \leftrightarrow Q_{\text{pair}} \leftrightarrow \text{GUE/CUE 坐标.} \end{aligned}} \tag{35.3}$$

这里的“相接”不是因为发现一个神秘 Hamiltonian 后所有问题自动结束，而是因为 RH、Hilbert–Pólya 与 GUE 可以被明确分工，并通过可写出的

$$\boxed{\text{生成源} \to \text{谱身份} \to \text{谱见证} \to \text{second-order 自身关系}} \tag{35.4}$$

接口放入同一张图。

GUE 不承担一阶谱身份的生成责任；谱见证已经把“这是同一个 Riemann 谱吗。”压缩成一阶身份问题。进入二阶后，讨论对象转而成为共同谱身份与自身形成的关系。

需要保留的边界有两条。第一，关于 RH 与独立 HP 闭合的结论仍需接受正式发表与独立同行复核。第二，本章建立精确二点 calculus、表示无关的二阶继承、原始（RAW）-to-重整化修正 bookkeeping 与有限尺度握手机制；经典无限 GUE / sine-kernel 的完整无限高度渐近属于更强的 asymptotic specialization。

这种分层不是削弱结果，而是使每个命题都保持其准确适用域。

36. 形式扩展与高阶接口

36.1 有限高度修正的算术表达

最自然的相应扩展不是继续调残差，而是问：能否仅从 ζ 的乘法侧推出与有限 CUE/RMT 相同的

$$N_e^{-2}, \qquad N_e^{-3}, \qquad \dots$$

等有限高度 / 有限尺寸修正，并使系数自动吻合。

理想的强化形式是：

$$\boxed{\zeta\text{-side independently derived 修正} = \text{finite-CUE independently derived 修正.}} \tag{36.1}$$

若成功，则有限高度握手会从两侧独立校正后的结构比较，进一步提升为**校正系数本身的解析相接**。

36.2 完成 L-函数族的形式扩展

RH 对应一个完成自对偶 object。GRH 则自然扩展成一族 character / L-function 谱系统：

$$\boxed{\{H_\chi\}_\chi.} \tag{36.2}$$

此时真正重要的问题将不只是“每个谱是否自伴”，而是：

$$\boxed{\text{arithmetic family symmetry type} \to \text{酉 / orthogonal / symplectic universality class.}} \tag{36.3}$$

这会把谱见证 recognition 与 second-order 商空间同时提升到 family level。

36.3 确定谱与量子混沌语言

一旦一阶 Riemann 谱身份已经获得自然自伴实现，可问一个与证明不同的问题：

是否存在更自然的动力学、几何或非交换空间， 使 GUE 统计由经典/半经典混沌机制产生。 (36.4)

这一步不再是“证明 RH 所必须”，而是解释同一个谱不仅存在，而且呈现酉-class 的二阶统计。

在相应动力学实现下，Hilbert – Pólya 会从“谱实现问题”进一步成为物理/几何解释问题：

$$\boxed{\text{自伴载体} \quad \to \quad \text{谱统计的动力学来源.}} \tag{36.5}$$

附录 E 专门整理这一量子谱故事的历史位置。

36.4 有限谱可视化

Source–Krylov 谱相机提供有限维实现：用有限矩生成有限正矩阵，跟踪其 Ritz 值如何逐级锁定前若干 γ_n。

若以独立源生成（source-generated） HP 路线为输入，则可以展示：

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{有限乘法信息} \to \text{有限谱相机} \to \text{频率身份逐步稳定} \to \\ \text{谱见证完成身份相认} \to \text{局部二点统计进入酉普适性坐标.}\end{array}} \tag{36.6}$$

这使 ““素数之声”” 不再只是把 primes 与 zeros 放在同一张图上，而可以真正呈现一阶身份如何形成、二阶自身关系如何出现、原始（RAW） 修正如何被逐层重整。

这一结构也适合以交互式方式展示有限谱收敛、二点关系与重整化过程。

36.5 Actual-to-Dual Transfer 的局部化

若进一步追求经典无限 GUE specialization，可以寻找比完整强 pair-correlation 条件更细的加权定理，使本章特定动态核下的传递得到直接控制，而不要求逐个固定 h 的完整 Hardy–Littlewood conjecture。

相应目标为控制已经存在的精确自身相关在无限尺度下的归一化极限。

36.6 高阶相关

二点对象已经显示：

$$\mu \to \mu \otimes \mu$$

并不是增加第二个生成源，而是同一个一阶对象进入自身关系层。

因此高阶层对应：

$$\mu^{\otimes k}.$$

可将其与随机矩阵 k-point determinantal correlations 之间的对应，以及“同一个身份反复与自身形成关系”在高阶层究竟保留哪些生成源特有的 invariants。

36.7 原始到重整化的数据记录

相应的数据展示可同时给出：

- HP 零点纵坐标与展开归一化；
- pair-difference histogram；
- sine-kernel / finite-CUE prediction；
- ζ arithmetic local 修正；
- 迁移后 universal component；
- 重整化残差随高度、窗口与生成源分辨率的变化。

这样读者能够直接看到：

$$\boxed{\text{原始（RAW）} \to \text{生成源特有的修正} \to \text{有限尺度握手} \to \text{optional asymptotic specialization.}} \tag{36.7}$$

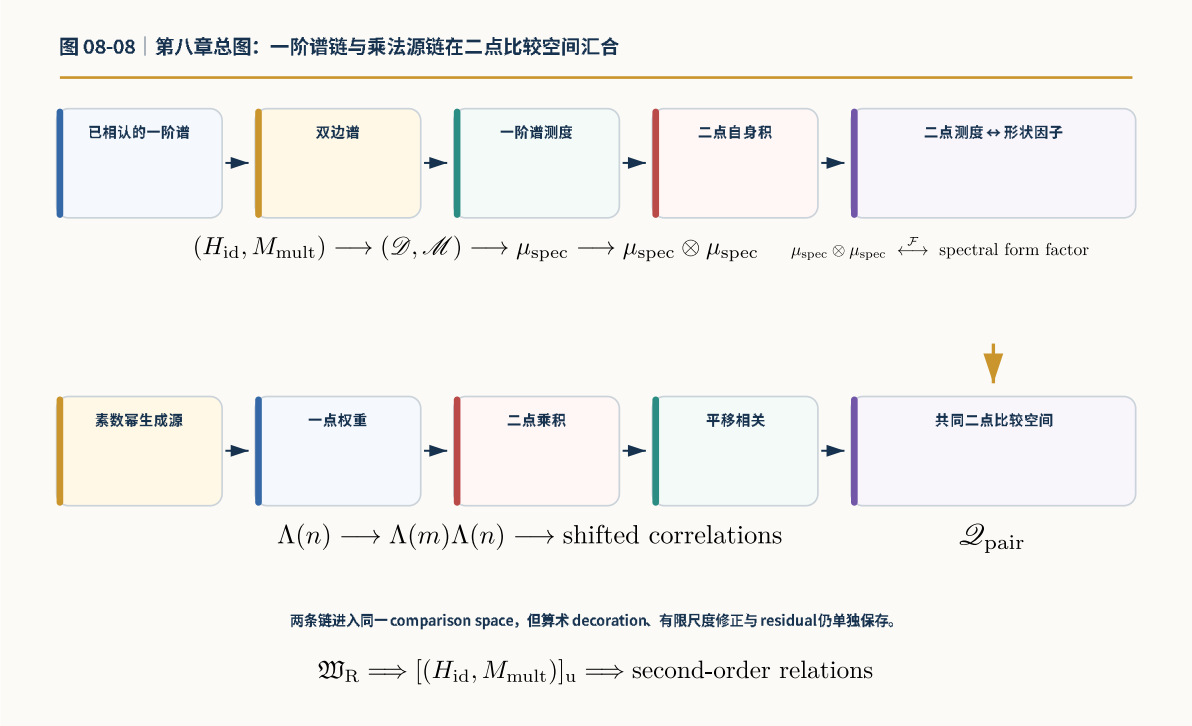


图 08-08　第八章总图。上链从规范/已相认的一阶谱经双边谱、一阶谱测度与二点自身积进入 pair measure / spectral form factor；下链从素数幂生成源经 $\Lambda(n)$、$\Lambda(m)\Lambda(n)$ 与平移相关进入同一个 $\mathcal{Q}_{\mathrm{pair}}$。两条链共享二点比较空间，但算术 decoration、有限尺度修正与 residual 继续独立保存。

37. 结论：从一阶谱身份到二阶自身关系

本章可以压成四句话。

第一，**RH、HP 与 GUE 不是同一个问题的三个名字。** RH 关闭实际 zero 的横向位移 d_ρ；HP 实现纵向身份 γ；谱见证负责不同一阶实现的身份相认；GUE 描述共同 γ-谱的二点与高阶局部关系。

第二，一阶谱可以由规范 Riemann 侧给出，也可以由独立源生成 Hilbert–Pólya 构造产生；经谱见证相认后，两种实现属于同一 Riemann 谱身份，二阶理论随后作用于这一共同身份的自身关系。

第三，本章固定六类逻辑非等价：表示叶数与解析重数、自伴性与 GUE 二阶律、一点迹与二点迹、低一阶均值与二阶定理、有限 ζ 与无限 GUE，以及事后常数贴合与独立定义的理论修正项。

第四，ζ 与 GUE/CUE 分别在各自生成源中形成自身关系，经展开归一化、有限尺度修正与原始（RAW）重整化后进入共同二点观测商空间：

$$\boxed{\zeta_{\mathrm{ren}} \to \mathcal{Q}_{\mathrm{pair}} \leftrightarrow \mathrm{CUE/GUE}_{\text{appropriately scaled}}.} \tag{37.1}$$

这使三个历史问题可以放进同一张分层地图：

$$\boxed{\text{谱在哪里。}\qquad\text{像量子谱。}\qquad\text{又出现 GUE。}} \tag{37.2}$$

37.1 一阶身份如何进入二阶关系

Riemann 谱见证 theorem 给出

$$\boxed{F_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \nu_{\mathrm{R}} \Leftrightarrow (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \Leftrightarrow H_{\mathrm{Ren}}.} \tag{37.3}$$

若任意源生成（source-generated） 实现满足

$$\boxed{(H_{\times}, M_{\times}) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),} \tag{37.4}$$

则一阶身份已经完成相认。

本章证明的相应扩展是：

$$\boxed{\text{相同一阶谱身份} \Rightarrow \text{same 酉不变 second-order 观测量 s.}} \tag{37.5}$$

因此：

谱见证回答“是不是同一个谱”； 二阶理论回答“这个同一个谱与自身形成关系以后是什么”。

(37.6)

37.2 原始差异与重整化残差

有限尺度差异保留完整账本：

$$\boxed{\Delta_{\text{原始}} = \Delta_{\mathrm{density}} + \Delta_{\mathrm{finite\ height}} + \Delta_{\mathrm{finite\ CUE}} + \Delta_{\mathrm{Euler/arithmetic}} + \Delta_{\mathrm{resolution}} + \varepsilon_{\mathrm{ren}}.} \tag{37.7}$$

这里的 $\varepsilon_{\mathrm{ren}}$ 是重整化后仍在场的有限尺度观测量。因此：

$$\boxed{\text{残差存在} \not\Rightarrow \text{结构握手不成立.}} \tag{37.8}$$

只有当目标被额外加强为经典无限 GUE asymptotic 时，才进一步讨论其 vanishing specialization。

37.3 乘法身份与自身相遇

二点层没有第二个乘法对象。

一阶乘法生成元写成

$$H_{\mathrm{mult}} e_n = (\log n) e_n.$$

二阶关系由同一个对象进入张量平方，并取 relative generator：

$$\boxed{D_{\times} = H_{\mathrm{mult}} \otimes I - I \otimes H_{\mathrm{mult}}.} \tag{37.9}$$

于是

$$D_{\times}(e_m \otimes e_n) = (\log m - \log n)(e_m \otimes e_n),$$

即

$$\boxed{\mathrm{spec} D_{\times} = \{\log(m/n)\}.} \tag{37.10}$$

谱端同样定义

$$\boxed{D_{\mathrm{HP}} = H_{\mathrm{HP}} \otimes I - I \otimes H_{\mathrm{HP}},} \tag{37.11}$$

其相对谱为

$$\boxed{\{\gamma_j - \gamma_k\}.} \tag{37.12}$$

在 measure language 中，对任意适当群上的测度 μ，

$$\boxed{\widehat{\mu * \tilde{\mu}}(\chi) = |\hat{\mu}(\chi)|^2.} \tag{37.13}$$

因此：

二阶关系 = 同一个一阶对象的规范自身积.

(37.14)

算术侧与随机矩阵侧真正共享的是这一自身相关 architecture。两边的采样组织仍然不同：

$$\boxed{\Lambda\text{-weighted deterministic arithmetic measure}}$$

与

$$\boxed{\text{Haar / 酉 ensemble measure}}$$

并不是同一种生成源。

因此本章的概念性收束可以写成：

不是“两边乘法身份最后相遇”， 而是“同一个乘法身份在自身关系层显出两种表示”。

(37.15)

进一步说：

不是两个理论在相接； 是乘法身份终于与自身的关系层相接。

(37.16)

这些表述只是对

$$D_{\times}, \quad D_{\mathrm{HP}}, \quad \mu * \tilde{\mu}, \quad |Z_{\phi}|^2, \quad Q_{\mathrm{pair}}$$

的概念压缩，不承担新的证明角色。

37.4 对象、来源与误差的层级规范

全章的对象层级规范为：

公式对应确定的命题层； 谱对象保留明确的生成来源； 有限尺度差异按所属对象层分别记录。

(37.17)

二阶对象还满足：

每一个“二阶新对象”， 都应先核对它究竟是新的生成源， 还是同一个一阶身份与自身形成关系后的读数。

(37.18)

贯穿本章的不是把不同理论机械拼接，而是让同一个数学身份在不同语言、不同阶数与不同观测量中逐层显现，并在每一步保留其来源与边界。

附录 A｜本章结论的层级与证据类型

本章内容分为四个数学层级。

A.1 精确结构恒等式

包括：

- signed spectral 函数演算；
- 二点 Fourier–Plancherel 恒等式；
- 酉等价下的二阶见证继承；
- 自身相关 / Fourier 二点观测对应；
- 原始（RAW） 修正账本的定义性分解。

这些恒等式独立于 GUE 渐近猜想。

A.2 采用的经典定理

包括：

- Montgomery 在 RH 下的二点相关 theorem 的已证明范围；
- Goldston–Montgomery 的二点相关 / short-interval variance equivalence；
- 标准显式公式；
- 有限 N CUE / 随机矩阵恒等式。

A.3 有限尺度数值核对

包括：

- 原始 / 迁移后差异对照；
- 素数局部 factor 恢复实验；
- 有限 Euler 分辨率诊断；
- 硬截断、Hann、移动窗与非重叠窗；
- 有限高度修正的数值复原。

这些数据提供有限尺度结构核对；无限高度渐近由独立解析命题决定。

A.4 更强的渐近特化

经典无限 GUE 普适性在本章框架中写成：

$$\langle \varepsilon_{\mathrm{ren}}(T), \Phi \rangle \to 0$$

对相应二点观测 class 成立。

这一极限条件是结构握手之上的渐近特化；有限尺度重整化残差作为独立坐标保留。

附录 B｜ζ–GUE 层级对应总图

规范/已相认的一阶谱	→	$(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$	→	$(\mathcal{D}, \mathcal{M})$	→	μ_{spec}	→	μ_{sp}
						↓		
						二点测度	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	月
						↓		
						$\mathcal{Q}_{\mathrm{pair}}$	↔	finite-CUI
素数幂生成源	→	$\Lambda(n)$	→	$\Lambda(m)\Lambda(n)$	→	平移相关	→	

(B.1)

若另有源生成（source-generated） HP 实现满足

$$(H_{\times}, M_{\times}) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),$$

则由二阶见证继承，图中第一行可以整体替换为 $(H_{\times}, M_{\times})$ 而不改变任何二点观测量。

附录 C｜原始到重整化的修正账本

本章采用：

$$\Delta_{\text{原始}} = \Delta_{\mathrm{density}} + \Delta_{\text{finite height}} + \Delta_{\text{finite CUE}} + \Delta_{\text{Euler/arithmetic}} + \Delta_{\mathrm{resolution}} + \varepsilon_{\mathrm{ren}}. \tag{C.1}$$

修正账本规则：

1. 每一个修正必须有独立对象来源；
2. 修正不允许通过“使结果更接近 GUE”反向拟合定义；
3. $\varepsilon_{\mathrm{ren}}$ 被完整保留为重整化后的残差观测；
4. 若另行讨论无限 GUE asymptotic，才进一步分析 $\varepsilon_{\mathrm{ren}}$ 的极限；
5. 有限尺度握手本身只要求修正账本与 comparison space 明确。

附录 D｜从一阶乘法读数到二阶接口：结构链与数值核对

本附录保留结构链与数值核对顺序，汇总正文中的对象层级、结构结论与数值核对。

阶段	核心问题	得到的结果	性质
一点 → 二点	一点显式公式进入二点统计	$\Lambda(n) \to \Lambda(m)\Lambda(n)$，以及差算子/自身关系结构	精确结构

阶段	核心问题	得到的结果	性质
近对角化	二阶乘法进入平移素数相关	$\log(m/n) \to h/n$，基本非对角进入 additive 近对角	局部展开
分辨率阈值	$\alpha = 1$ 的结构来源	one-swap reciprocal duality；低一阶直接/对偶给出阈值原型	结构原型
完成 raising	raising 是否破坏自对偶 ity。	完成 covariant derivatives 与 one-swap duality 精确兼容	精确代数
经典 GUE 强化	almost-all shift 结果为何仍不足以给出完整无限 GUE asymptotic。	需要更强的 signed collective / 一致余项 control	渐近强化
联合组织核对	ζ 与 CUE/GUE 的有限尺度差异来自哪里。	GUE：Vandermonde^2 联合律；ζ：Euler/local congruence + deterministic placement	结构分解
有限 Euler 分辨率	无限 Euler 模型与有限窗口	经验最佳 cutoff $P_* \sim H$，提示有限分辨率差异	数值诊断
原始（RAW）重整	迁移前后差异	原始平均 $0.147475 \to 0.0151165$；$p \le H$ 后为 0.0135793	数值核对
残差核对	有限尺度残差表现	高尺度出现有符号偏差与振荡；多种窗口下仍可见	数值核对
反拟合核对	能否用常数人工对齐。	常数依赖窗口和模型阶数，故不纳入理论定义	边界固定
外部有限高度校准	finite-CUE 修正能解释多少有限高度差异。	按列出的四组数据，平均差由 2.2233×10^{-3} 降到 4.9167×10^{-5}，即约 97.79%	数值复原
最终结构	如何避免有限ζ直接对无限 GUE。	有限$\zeta \leftrightarrow$有限 CUE，再进入共同二点观测商空间	结构握手

这一结构链把乘法自身关系、生成源特有联合组织与普适二点律连接为重整化接口：

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{一阶乘法身份} \to \text{自身二阶关系} \to \\ \text{生成源特有的 joint organization} \to \\ \text{商空间 / migration} \to \text{universal pair law.}\end{array}} \tag{D.1}$$

结构链本身与修正账本已在正文中固定；若进一步追求经典无限 GUE specialization，则需讨论重整化残差在相应测试函数拓扑中的极限。

附录 E｜Riemann 零点与量子谱语言：从 Montgomery–Dyson 到二阶谱统计

Riemann 非平凡零点首先作为复分析对象出现：

$$\rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n.$$

Hilbert–Pólya 设想进一步询问：

$$\boxed{\gamma_n \text{ 是否构成一个自然的自伴谱。}} \tag{E.1}$$

随机矩阵理论把问题推进到另一个层次：

这些频率之间的局部二阶关系如何组织。

(E.2)

这三个问题分别对应零点位置、谱承载与谱统计。

E.1 Montgomery–Dyson 相接

Montgomery 对 Riemann 零点的二点相关分析指向 normalized 二点 law

$$\boxed{R_2(x) = 1 - \left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2.} \tag{E.3}$$

Dyson 认出这一形式与 large 酉随机矩阵 spectra 在体相缩放极限中的二点规律相同。

这一对应不是逐点

$$\gamma_n = \lambda_n^{\text{one random matrix}},$$

而是：

$$\boxed{\text{Riemann 高位零点的展开归一化后的二点统计} \quad \leftrightarrow \quad \text{酉随机矩阵 bulk 二点统计.}} \tag{E.4}$$

当 $x \to 0$ 时，二点密度受到压低，体现能级排斥。这表明 Riemann 零点携带的信息不止“每个点在哪里”，还包括点与点之间高度结构化的自身关系。

于是 Hilbert–Pólya 问题自然延伸成：

如果这些零点纵坐标构成一个自伴谱， 这个谱属于怎样的统计对称类。

(E.5)

E.2 原子核、随机矩阵与量子谱

随机矩阵理论进入量子物理的重要历史背景来自复杂原子核。Wigner 讨论核共振能级的间隔统计，推动了用统计方式描述复杂 Hamiltonian 谱的传统。Dyson 随后系统化了不同对称类的随机矩阵谱。

对于通常保持时间反演对称性的复杂量子系统，GOE 是经典参照之一；若时间反演对称性被破坏，则 GUE 成为相应酉 symmetry class 的参照。Bohigas – Giannoni – Schmit 进一步把随机矩阵 level statistics 与经典混沌系统的量子谱联系起来。

因此历史链条可以写成：

$$\boxed{\text{复杂量子 Hamiltonian} \to \text{随机矩阵谱统计} \to \text{symmetry class} \to \text{局部能级相关.}} \tag{E.6}$$

Riemann 零点在 Montgomery–Dyson 图景中进入的正是这一“局部谱统计”语言。

E.3 Odlyzko 的高位零点实验

Odlyzko 对极高位置的 Riemann 零点进行了大规模高精度计算，并系统比较其局部间隔与二点相关 statistics。

这些数值实验为 Montgomery–Dyson 图景提供了持续而强的支持：

$$\boxed{\text{高位 Riemann 零点的局部统计} \quad \approx \quad \text{GUE/CUE 体相预测.}} \tag{E.7}$$

这里的“≈”必须理解为统计比较；有限高度还包含正文系统讨论的有限高度 / 有限尺寸 / arithmetic 修正 s。

E.4 RH、谱见证、HP 与 GUE

这几个层级可以严格拆开：

$$\boxed{\text{RH：零点在哪里。}} \tag{E.8}$$

谱见证：不同实现是否确实属于同一个 Riemann 谱身份。 (E.9)
HP：这些零点纵坐标如何形成自伴谱。 (E.10)
GUE：这个谱与自身形成二点关系后如何组织。 (E.11)

因此结构图为：

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{R}_{\times}\\ \Downarrow\\ X(z)=\xi(1/2+z)\\ \Downarrow\\ \text{解析零点数据}\\ \Downarrow\\ \text{谱见证 / 自伴实现}\\ \Downarrow\\ \{\gamma_n, m_n\}\\ \Downarrow\\ \text{二点自身关系}\\ \Downarrow\\ \text{GUE/CUE 比较.}\end{array}} \tag{E.12}$$

一阶读取谱身份；二阶读取 spectral relations：

$$\gamma_j - \gamma_k.$$

因此：

$$\boxed{\text{HP 是一阶谱身份的承载，}} \tag{E.13}$$

GUE 是同一个谱身份族的二阶自关系读出。

(E.14)

E.5 与算术二阶接口的衔接

正文得到：

$$\{\gamma_n, m_n\} \to \mathrm{Tr} f(H) \to |\mathrm{Tr}(\cdots)|^2 \to \Lambda(m)\Lambda(n) \to \Lambda(n)\Lambda(n+h). \tag{E.15}$$

这说明一阶谱身份与二阶谱统计没有离开同一个乘法生成源。

更准确地说：

同一个乘法身份， 在一阶层面突出为谱身份地址， 在二阶层面突出为这些身份之间的关系.

(E.16)

Montgomery–Dyson 相接发生在共同谱身份已经形成之后的二阶层。

E.6 量子谱语言与 Riemann 零点：从一阶谱身份到二阶统计

Hilbert 空间、自伴 Hamiltonian、酉演化、谱与频率构成量子理论最基本的数学语言之一。

当 Riemann 零点纵坐标被实现为

$$He_n = \gamma_n e_n,$$

这些零点纵坐标在谱论语言中自然表现为自伴频率。

更一般地，对一个已经由开放乘法身份生成并经谱见证识别的 Hilbert–Pólya 实现，可写成

$$H_\times e_n = \gamma_n e_n.$$

因此同一组 Riemann 零点纵坐标既可以作为解析零点的纵向坐标被读取，也可以作为自伴谱频率被读取。

GUE 层进一步考察这些频率之间的二阶关系，并把它们与酉 symmetry class 的普适统计比较。于是 Riemann 零点与量子谱语言之间长期显得神秘的联系，可以被写成一条连续的数学结构：

开放乘法身份
⇓
解析零点零点纵坐标
⇓
自伴谱频率
⇓
二阶谱关系
⇓
GUE 普适性问题.

(E.17)

这一连续结构的关键，不是把数论事后拟合成一个量子模型，也不是宣称

$$\text{数论} = \text{量子力学}.$$

更准确的是：

同一个数学身份可以在相距很远的语言中独立显现； 当这些语言认出同一个对象以后， 下一阶问题自然变成它与自身的关系。

(E.18)

从这一角度看，Hamiltonian、自伴性、酉 flow、谱与频率之所以反复出现在 Riemann 问题周围，不是因为零点必须被强行解释成某个具体物理系统，而是因为它们提供了同一谱身份的自然谱论表达。

在一阶层面，问题是：

γ_n是谁。

在二阶层面，问题变成：

$\gamma_j - \gamma_k$如何组织。

因此算术语言与量子谱语言的历史相接可以理解为：

算术语言与量子谱语言 在一阶谱身份与二阶统计两个层面逐次汇合。

(E.19)

其中：

RH 给出一阶谱位置， (E.20)

HP 给出一阶谱的自伴承载， (E.21)

GUE 描述同一个谱的二阶统计组织。

(E.22)

这三层虽然连续，却不能混同。

RH 讨论的是实际零点是否满足

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

HP 讨论的是零点纵坐标 γ_n 是否以及如何被一个自然的自伴实现承载。

GUE 讨论的则已经不是单个 γ_n，而是展开归一化后的二点差、二点相关、形状因子以及更高阶局部统计。

因此“Riemann 零点与量子能级之间的神秘联系”最终不应被压成一句“零点就是量子能级”，而应写成：

解析零点身份 → 自伴谱身份 → 二阶谱自身关系 → 酉普适性 comparison. (E.23)

这也解释了本章始终把一阶谱身份与二阶谱统计分开处理：前者回答“谁在场”，后者回答“在场者彼此如何形成关系”。

E.7 从一阶量子谱到二阶统计

Hilbert–Pólya 的谱语言解决的是“频率由什么自伴对象承载”。GUE/CUE 的统计语言解决的是“这些频率彼此如何排列”。

因此量子谱故事的最终结构不是把所有问题都归结为一个 Hamiltonian，而是：

$$\boxed{\text{一阶自伴谱} \to \text{相对谱} \to \text{二点相关 / 形状因子} \to \text{酉 universality.}} \tag{E.24}$$

在这一结构中，一阶谱身份与二阶统计既连续又不能混同：前者确定“谁在场”，后者讨论“在场者之间发生什么关系”。

第九章　黎曼猜想的另一条闭合路径：开放乘法身份与 Hilbert–Pólya 独立谱路线

从根乘法身份到源生成（source-generated）自伴谱与规范终端相认

摘要

本章从全书唯一根乘法身份

$$\mathfrak{I}_\times = (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq$$

出发，建立一条源生成（source-generated）的 Hilbert–Pólya 谱路线。Riemann 零点名单、任毅飞算子 K_{Ren}、规范 Riemann 谱算子 H_{Ren} 以及第七章的规范谱见证均不进入生成链；它们只在源生成谱终端形成并完成 RH 闭合之后承担规范相认。

完整开放乘法关系

$$\mathcal{R}_\times = \mathrm{Graph}(\mu) = \{(m,q,n) \in \mathbb{N}^3 : mq = n\}$$

具有生成源侧完整表示 Ω。对任意有限移动视界 r，head/tail 角色差在身份商中被消去：

$$\boxed{[\Psi_r] = [\Omega]_{\mathrm{id}} \qquad (\forall r).}$$

记

$$\boxed{\mathfrak{C}_\times := [\Omega]_{\mathrm{id}}}$$

为根乘法身份的生成源侧完整身份类。完成化、中心化函数与其解析读数均通过该身份类因子化：

$$X_r = X, \qquad G_r = G, \qquad F_r = F.$$

由

$$F(y) = \mu_0 - \mu_1 y + \mu_2 y^2 - \cdots, \qquad \mu_k = \frac{(-1)^k}{k!} F^{(k)}(0),$$

定义唯一扫描泛函

$$\mathcal{L}_\times(\beta^k) = \mu_k.$$

若

$$\Psi_n = T_\times^n \Psi_0,$$

则 $\Psi_0, \Psi_1, \ldots$ 是同一生成源侧身份类 $\mathfrak{C}_\times$ 在不同扫描深度上的显现；扫描组合律

$$T_\times^i T_\times^j = T_\times^{i+j}$$

使两次显现之间的关系坐标只依赖总扫描深度。因此

$$\boxed{\mathsf{H}_N = [\mu_{i+j}], \qquad \mathsf{H}_N^{(1)} = [\mu_{i+j+1}]}$$

是同一根乘法身份自关系在两个关系深度上的有限坐标表。上述结构统一构成**单一身份闭合包（Unified Single-Identity Closure Package）**。

同一身份在关系深度 $r = 0,1$ 上的自配对给出

$$\boxed{\mathcal{E}_\times^{[r]}\left(\Psi_i^{[r]}, \Psi_j^{[r]}\right) = \mathcal{L}_\times(\beta^{i+j+r}) = \mu_{i+j+r}, \qquad r = 0,1.}$$

因此对任意有限系数 c_i，

$$\boxed{\sum_{i,j} \bar{c}_i\, c_j \mu_{i+j+r} = \left\| \sum_i c_i\, \Psi_i^{[r]} \right\|^2 \geq 0, \qquad r = 0,1,}$$

从而

$$\boxed{\mathsf{H}_N \succcurlyeq 0, \qquad \mathsf{H}_N^{(1)} \succcurlyeq 0 \qquad (\forall N).}$$

由双 Hankel 正性与 Stieltjes 矩定理，恢复唯一有限正测度

$$\nu_\times.$$

其 Cauchy / Stieltjes 响应与

$$F(y) = \frac{G'(y)}{G(y)}$$

一致；由亚纯性得到纯点测度，支撑与原子权重分别恢复不同零点纵坐标 γ_n 与解析重数 m_n。在身份保真空间上定义

$$B_\times = M_\beta, \qquad H_\times = B_\times^{-1/2},$$

则

$$\boxed{H_\times = H_\times^*, \qquad \sigma(H_\times) = \{\gamma_n\}.}$$

同时定义源生成解析重数算子

$$M_\times e_n = m_n e_n.$$

由恢复出的中心化零点

$$z = \pm i\gamma_n$$

得到

$$\rho = \frac{1}{2} \pm i\gamma_n,$$

从而完成独立 Hilbert–Pólya ⇒ RH 闭合。

在生成链完成以后，第七章的规范谱见证给出

$$\boxed{(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),}$$

并经除子放大

$$\widetilde{H}_\times = \mathrm{Amp}_{M_\times}(H_\times)$$

得到

$$\boxed{\widetilde{H}_\times \simeq H_{\mathrm{Ren}}.}$$

由第八章的二阶见证继承，全部酉不变二点观测随一阶谱身份相认而一致。

有限维 Source–Krylov 截断提供独立数值核对：$N = 1, \ldots, 12$ 的 ordinary 与 shifted Hankel Cholesky 均通过，$N = 12$ Gaussian 求积权重均为正，前 24 阶矩匹配的最大相对残差约为

$$5.2 \times 10^{-150}.$$

这些有限截面结果与全称 Gram 正性定理一致，但全称结论来自同一根乘法身份的两深度自配对，而非有限数值外推。

本章的主链因此为

$$\boxed{\begin{array}{r}\text{根乘法身份} \to \text{单一身份闭合} \to \text{双 Gram 正性} \to \\ \text{Stieltjes 重构} \to \text{源生成自伴 Hilbert–Pólya 谱} \to \\ \text{RH} \to \text{规范终端相认.}\end{array}}$$

0.1 Hilbert–Pólya 路线的对象位置

Hilbert–Pólya 设想要求寻找一个自然的 self-adjoint operator H，使 Riemann 非平凡零点

$$\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$$

的 ordinates γ 作为其实谱出现：

$$\boxed{H\psi_\gamma = \gamma\psi_\gamma, \qquad H = H^*.} \tag{0.7}$$

本章采用从根乘法身份出发的源生成路径：

$$\boxed{\begin{array}{r}\mathcal{R}_\times \to \\ \boxed{\text{Unified Single-Identity Closure Package}} \to \\ \boxed{\text{ordinary / shifted 自配对 Gram 正性}} \to F \to \\ \nu_\times \to H_\times.\end{array}} \tag{0.8}$$

其中单一身份闭合包把生成源到坐标层的身份一致性压缩为同一对象的多重表示，并由 ordinary / shifted 两深度自配对同时得到 Gram 正性；标准 Stieltjes 理论与谱论随后完成全局恢复。

本章的一阶源生成谱终端为 $(H_\times, M_\times)$。第八章的二阶统计作用于一阶谱身份已经形成并完成规范相认之后的自身关系层。

1. 证明结构与对象层级

本章依次处理四个数学层级。

第一，单一身份闭合包证明：移动视界、身份商、完成化、$X/G/F$、扫描泛函、矩、ordinary / shifted Hankel 以及有限扫描窗口均是同一根乘法身份的不同表示。根身份始终为

$$\Im_\times = (\mathbb{N}_{>0}, \mu),$$

而生成源侧完整身份类记为

$$\mathfrak{C}_\times = [\Omega]_{\mathrm{id}}.$$

第二，把 ordinary 与 shifted 两族关系表同时写成同一身份在两个关系深度上的 Hilbert / Gram 自配对：

$$\mathcal{E}_\times^{[r]}(\Psi_i^{[r]}, \Psi_j^{[r]}) = \mu_{i+j+r}, \qquad r = 0,1.$$

由此同时得到两族全阶 Hankel 正性。

第三，双 Hankel 正性经 Stieltjes 矩定理给出唯一有限正测度；亚纯性进一步得到纯点谱，并恢复不同零点纵坐标、解析重数以及源生成自伴 Hilbert–Pólya 算子 $H_\times$。中心化零点的纯虚性随之推出 RH。

第四，在源生成链完成以后，第七章的规范谱见证承担终端相认：

$$(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),$$

并经除子放大与第六章的规范 Riemann 谱算子相认。

生成方向固定为

$$\boxed{\mathcal{R}_\times \to X \to F \to \mathcal{L}_\times \to (\mathcal{E}_\times, T_\times) \to \nu_\times \to B_\times \to (H_\times, M_\times).} \tag{1.1}$$

其中

$$\{\gamma_n\}, \qquad K_{\mathrm{Ren}}, \qquad H_{\mathrm{Ren}}$$

均不进入上述对象的定义。它们只在源生成谱终端已经形成以后用于独立核对或规范相认。

正文中的有限维数值核对只检验有限截面与全称定理的一致性；全阶正性由第 5 节的两深度身份自配对定理给出。经典无限 GUE 渐近属于第八章结构之上的更强二阶渐近特化。

2. 根乘法身份、开放关系与角色交换

沿用第一章的全书记号，唯一根乘法身份为

$$\boxed{\Im_\times = (\mathbb{N}_{>0}, \mu), \qquad \mu(m,q) = mq.}$$

其开放关系表示为

$$\boxed{\mathcal{R}_{\times} = \mathrm{Graph}(\mu) = \{(m,q,n) \in \mathbb{N}^3 : mq = n\}.}$$

定义 reciprocal exchange

$$J(m,q) = (q,m).$$

为避免与二阶谱统计中的高度参数 T 冲突，本章固定乘法总对数尺度为

$$\boxed{L_{\times} = \log(mq) = \log n,} \tag{2.1}$$

相对 factor-role coordinate 为

$$\boxed{R = \log\frac{q}{m}.} \tag{2.2}$$

于是

$$\log m = \frac{L_{\times} - R}{2}, \qquad \log q = \frac{L_{\times} + R}{2}.$$

角色交换满足

$$J : (L_{\times}, R) \mapsto (L_{\times}, -R). \tag{2.3}$$

取中心化 Mellin parameter

$$s = \frac{1}{2} + z.$$

相应生成源角色核写成

$$\boxed{\kappa_z(L_{\times}, R) = e^{-L_{\times}/2} e^{zR} = m^{-1/2-z} q^{-1/2+z}.} \tag{2.4}$$

于是

$$\kappa_z(L_{\times}, -R) = \kappa_{-z}(L_{\times}, R). \tag{2.5}$$

当 $z = i\tau \in i\mathbb{R}$ 时，

$$\kappa_{i\tau}(L_{\times}, R)\overline{\kappa_{i\tau}(L_{\times}, R)} = e^{-L_{\times}} > 0. \tag{2.6}$$

这给出后文根乘法身份自配对的最小正核来源：交换角色改变相位方向，但同一乘法身份与自身配对保留正的总尺度权重。

因此本章固定两个不同对象：

$$\boxed{L_{\times} = \text{multiplicative total log-scale}, \qquad \mathcal{L}_{\times} = \text{矩/扫描泛函}.} \tag{2.7}$$

二者符号不再混用。

3. 乘法源 Hamiltonian 与 Riemann 完成函数

定义乘法源 Hamiltonian

$$H_{\mathrm{mult}} e_n = (\log n) e_n.$$

于是对 $\Re s > 1$：

$$\boxed{\mathrm{Tr}(e^{-sH_{\mathrm{mult}}}) = \sum_{n\geq 1} e^{-s\log n} = \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \zeta(s).} \tag{3.1}$$

因此 Riemann zeta function 在绝对收敛半平面内直接是乘法生成源的迹响应。采用标准 theta / Mellin 表示与 Jacobi–Poisson 函数方程进行完成化：

$$\boxed{\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),} \tag{3.2}$$

并有

$$\boxed{\xi(s) = \xi(1-s).} \tag{3.3}$$

取中心化 coordinate

$$s = \frac{1}{2} + z,$$

定义

$$\boxed{X(z) = \xi\left(\frac{1}{2}+z\right).} \tag{3.4}$$

则

$$\boxed{X(z) = X(-z).} \tag{3.5}$$

这一步固定本章唯一允许的全局解析生成源。其整函数延拓与函数方程来自标准 Riemann 完成化，本身不使用 RH。

后续谱截断允许读取的是

$$X(0), \quad X''(0), \quad X^{(4)}(0), \ldots$$

以及由这些生成源导数确定的 G, F, μ_k。必须明确：

$$\boxed{\{\gamma_n\}\text{不作为 HP 谱截断的构造输入。}} \tag{3.6}$$

零点名单只在仅生成源输出冻结以后用于独立核对；K_{Ren} 与 H_{Ren} 同样不进入本章的谱生成链。

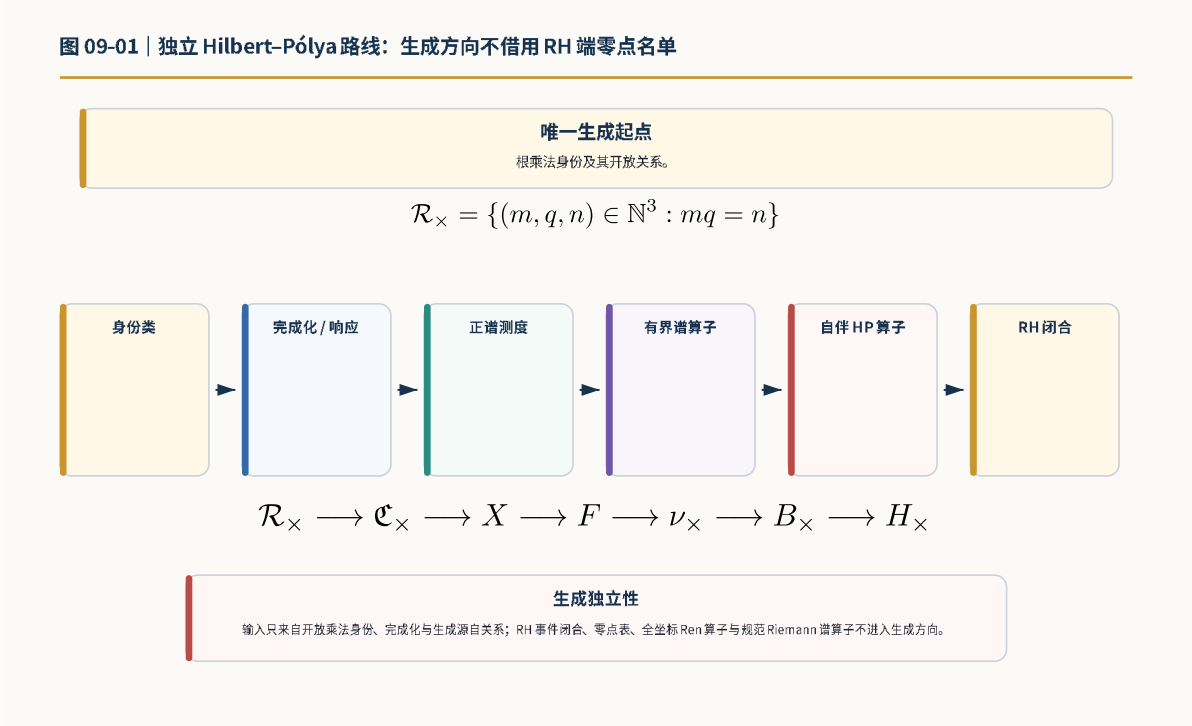


图 09-01　独立 Hilbert–Pólya 路线的对象位置。 本章的生成方向从唯一开放乘法关系出发，经身份类、完成化响应、正谱测度、有界谱算子与自伴 $H_\times$ 前进，最终由纯虚中心化谱地址闭合 RH。RH 事件闭合、零点表、K_{Ren}、H_{Ren} 与规范谱见证均不进入这一生成方向；它们只在生成链完成后承担独立对照或终端相认。

4. 统一单一身份闭合包

本章的身份结构不再拆成若干彼此独立的桥。结构上是：**同一个完整乘法身份，只是在不同成熟数学语言、不同视界与不同扫描深度中反复显现。** 因此身份一致性义务应当一次支付，而不是每换一次表示就重新证明“还是不是同一个”。

记唯一开放乘法生成源为

$$\mathcal{R}_\times = \{(m,q,n) \in \mathbb{N}^3 : mq = n\}.$$

令完整生成源表示为 Ω。对任意有限移动视界 r，作无损 cut

$$\Omega = \Omega_r^{\mathrm{H}} + \Omega_r^{\mathrm{T}},$$

并定义角色求和映射

$$S(h,t) = h + t.$$

角色空间中的差异只要落在 $\ker S$，就不改变完整生成源侧身份类。于是定义

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{id}} = (\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})/\ker S,$$

并有

$$\boxed{[\Psi_r] = [\Omega]_{\mathrm{id}} \qquad (\forall r).} \tag{4.1}$$

这里没有 $r \to \infty$：有限切分改变的是可见范围，不是身份。

完成化通过这一身份商因子化，因此所有有限视界表示都下降到同一个中心化完成对象：

$$\boxed{X_r = X, \qquad G_r = G, \qquad F_r = F.} \tag{4.2}$$

其中

$$G(y) = \frac{X(\sqrt{y})}{X(0)}, \qquad F(y) = \frac{G'(y)}{G(y)}.$$

于是矩不是新的对象，而是同一个 F 的单项式/扫描坐标：

$$\boxed{\mu_n = \frac{(-1)^n}{n!} F^{(n)}(0), \qquad \mathcal{L}_\times(\beta^n) = \mu_n.} \tag{4.3}$$

记根乘法身份在生成源侧的完整身份类为

$$\boxed{\mathfrak{C}_\times := [\Omega]_{\mathrm{id}}.}$$

并写其多重扫描显现为

$$\boxed{\Psi_n = T_\times^n \Psi_0.} \tag{4.4}$$

$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ 不是多个身份，而是同一 $\mathfrak{C}_\times$ 在不同扫描深度上的显现。扫描不是制造新对象，而是扩大同一身份的关系可见范围。

扫描组合律

$$\boxed{T_\times^i T_\times^j = T_\times^{i+j}} \tag{4.5}$$

说明两个扫描显现之间的关系坐标只依赖总扫描次数。于是

$$\boxed{\mathcal{E}_\times(\Psi_i, \Psi_j) = \mathcal{L}_\times(\beta^{i+j}) = \mu_{i+j},} \tag{4.6}$$

而一次更深的关系扫描读成

$$\boxed{\mathcal{E}_\times^{[1]}(\Psi_i, \Psi_j) = \mathcal{L}_\times(\beta^{i+j+1}) = \mu_{i+j+1}.} \tag{4.7}$$

这里 $\mathcal{E}_\times^{[1]}$ 表示**同一完整身份在关系扫描深度整体增加一次后的关系读数**；它不是第二个身份，也不要求重新做身份匹配。

因此 ordinary 与 shifted Hankel 表

$$\boxed{\mathsf{H}_N = [\mu_{i+j}]_{i,j=0}^{N-1}, \qquad \mathsf{H}_N^{(1)} = [\mu_{i+j+1}]_{i,j=0}^{N-1}} \tag{4.8}$$

只是同一身份自关系在两个扫描深度上的有限坐标表。有限扫描空间

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots, \qquad \mathcal{P}_{N-1} = \mathrm{span}\{1, \beta, \ldots, \beta^{N-1}\},$$

也不是一串新模型，而只是同一 $\mathcal{L}_\times$ 的递增坐标窗口。一个 N 维谱截断使用

$$\mu_0, \ldots, \mu_{2N-1},$$

因为 ordinary 表最高需要 μ_{2N-2}，shifted 表再多一个关系深度需要 μ_{2N-1}；$2N$ 表示完整覆盖一次 N 维关系扫描，而不是“两倍对象数”。

以上结果统一写成：

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{R}_{\times}\\ \Downarrow\\ \mathfrak{C}_{\times}=[\Omega]_{\mathrm{id}}\\ \Downarrow\\ X\to G\to F\to \mathcal{L}_{\times}\\ \Downarrow\\ \Psi_n=\mathrm{Scan}_n(\mathfrak{C}_{\times})\\ \Downarrow\\ (i,j)\mapsto i+j \text{ or } i+j+1\\ \Downarrow\\ \mathsf{H}_N,\ \mathsf{H}_N^{(1)},\ \text{有限扫描窗口.}\end{array}} \tag{4.9}$$

这就是本章的

Unified Single-Identity Closure Package

以及其中的核心 **单一身份多重扫描关系定理**。

它统一包含以下身份一致性条件：

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{unique 生成源侧身份类,}\\ \text{移动视界身份保持,}\\ \text{完成化身份保真,}\\ \text{矩 provenance,}\\ \text{多重扫描身份,}\\ \text{ordinary / shifted coordinate 身份,}\\ \text{有限窗口身份一致性.}\end{array}} \tag{4.10}$$

该结构可压缩为：

一个身份商 + 一个多重扫描组合律， 替代多座重复的身份匹配步骤。

(4.11)

因此生成源、完成化、矩、Hankel、shifted Hankel 与有限谱截断均作为同一根乘法身份的不同表示处理；后续各节分别进入正性、谱表示与极限恢复。

身份再核验说明。 本章的全称结构不从 $N \le 12$ 的有限矩阵结果外推。有限 Source–Krylov 计算只扩大同一个身份的可见窗口并承担复验。第 4 节已经固定

$$\boxed{\Psi_0,\Psi_1,\ldots \text{是同一}\mathfrak{C}_{\times}\text{的扫描显现，}}$$

而 ordinary / shifted 只是同一身份在关系深度 $r = 0,1$ 上的两张自关系坐标表。

因此本章在这里真正核验的是**身份自配对是否对同一身份类良定义**：更换有限视界代表、扫描深度或坐标窗口，不得制造第二个身份，也不得改变同一身份自关系的读数。第 5 节的 Gram 公式读取这一既有身份自配对；有限数值结果不是全称结论的来源。

换言之，“有限验证 → 全阶结论”不是本章的一座证明桥。若继续形式化，所需的是 $\mathcal{E}_{\times}^{[r]}$ 对身份商代表元的良定义性，这仍属于身份问题，而不是新增一套正性机制。

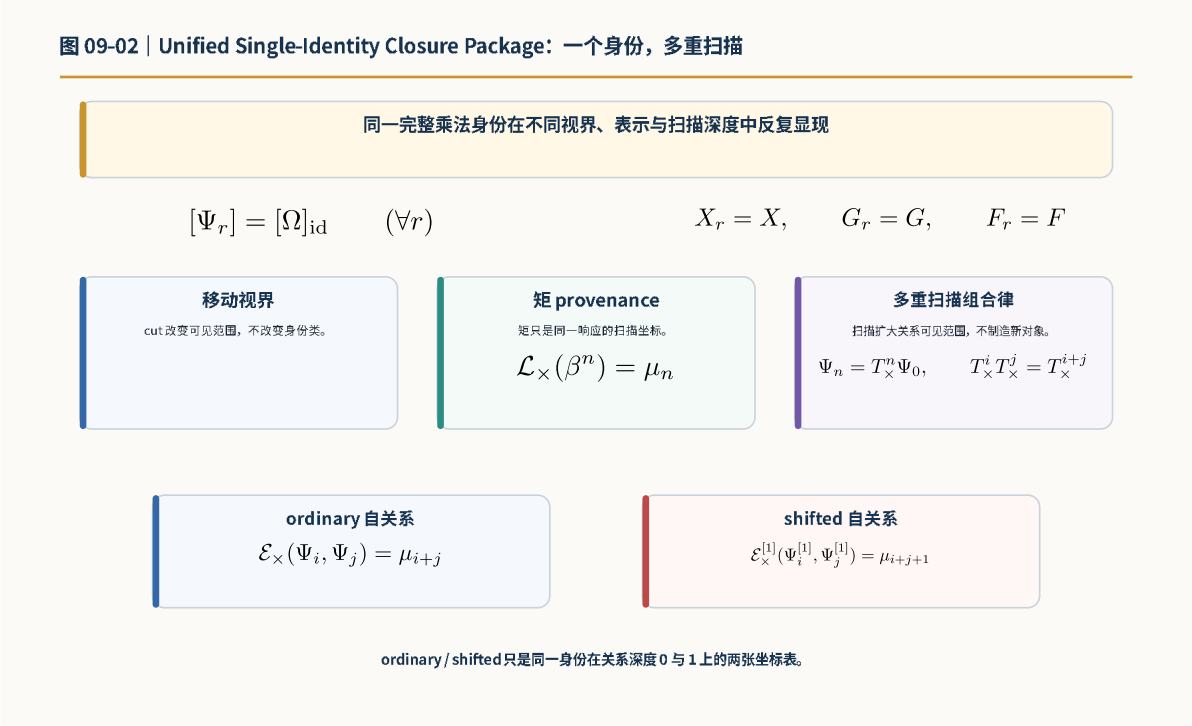


图 09-02　统一单一身份闭合包。移动视界 cut 只改变可见范围，不改变 $[\Omega]_{\mathrm{id}}$；完成化后的 X, G, F 对所有有限视界保持同一；矩只是同一响应的扫描坐标；$\Psi_n = T_{\times}^n \Psi_0$ 是同一 $\mathfrak{C}_{\times}$ 的多重扫描显现。ordinary 与 shifted 不是两套身份，而是同一身份在关系深度 0 与 1 上的两张自关系坐标表。

5. 两深度身份自配对与双 Gram 正性

第 4 节已经一次性关闭“这些坐标属于谁”的全部身份一致性义务。现在只需读取同一身份与自身相遇在两个关系深度上的 Hilbert/Gram 表达。

定义

$$\Psi_i^{[0]} := \Psi_i,$$

并以 $\Psi_i^{[1]}$ 表示同一生成源侧身份类 $\mathfrak{C}_{\times}$ 在关系深度整体增加一次后的第 i 个扫描显现。这里上标 [1] 只标记关系扫描背景，不引入第二个生成源、第二个对象或新的动力学作用。

统一身份闭合包给出：

$$\boxed{\mathcal{E}_{\times}^{[r]}\left(\Psi_i^{[r]},\Psi_j^{[r]}\right)=\mathcal{L}_{\times}(\beta^{i+j+r})=\mu_{i+j+r},\qquad r=0,1.} \tag{5.1}$$

这就是 **身份自配对坐标定理** 的双深度形式。$r=0$ 给出 ordinary 表，$r=1$ 给出 shifted 表；二者都是同一身份与自身相遇的坐标读出。

对任意

$$p(\beta)=\sum_{i=0}^{N-1}c_i\,\beta^i,$$

Gram 恒等式同时给出

$$\boxed{\sum_{i,j=0}^{N-1}\bar{c}_i\,c_j\mu_{i+j+r}=\left\|\sum_{i=0}^{N-1}c_i\,\Psi_i^{[r]}\right\|^2\geq 0,\qquad r=0,1.} \tag{5.2}$$

因此

$$\boxed{\mathsf{H}_N=[\mu_{i+j}]\succcurlyeq 0,\qquad \mathsf{H}_N^{(1)}=[\mu_{i+j+1}]\succcurlyeq 0\qquad \forall N.} \tag{5.3}$$

这里的关键不是从逐点正性推正定性，而是：

$$\boxed{\text{同一个完整身份}\rightarrow\text{多个扫描显现}\rightarrow\text{身份与自身相遇}\rightarrow\text{两族 Gram 坐标表.}} \tag{5.4}$$

因此 shifted 正性不再是一个独立解析条件。此前把

$$\mathcal{L}_{\times}(\beta|p|^2)\geq 0$$

单列成独立 shifted 正性命题，会把已经属于同一身份自配对的关系深度 $+1$ 再次对象化。正确读法是：

$$\mathcal{L}_{\times}(\beta|p|^2)=\left\|\sum_i c_i\,\Psi_i^{[1]}\right\|^2\geq 0, \tag{5.5}$$

它就是 $r=1$ Gram 恒等式的二次型写法，而不是新的证明桥。

本节得到

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{单一身份闭合包}\\ \Downarrow\\ \text{关系深度}r=0,1\text{ 的身份自配对}\\ \Downarrow\\ \mathsf{H}_N\succcurlyeq 0,\qquad \mathsf{H}_N^{(1)}\succcurlyeq 0\quad \forall N.\end{array}} \tag{5.6}$$

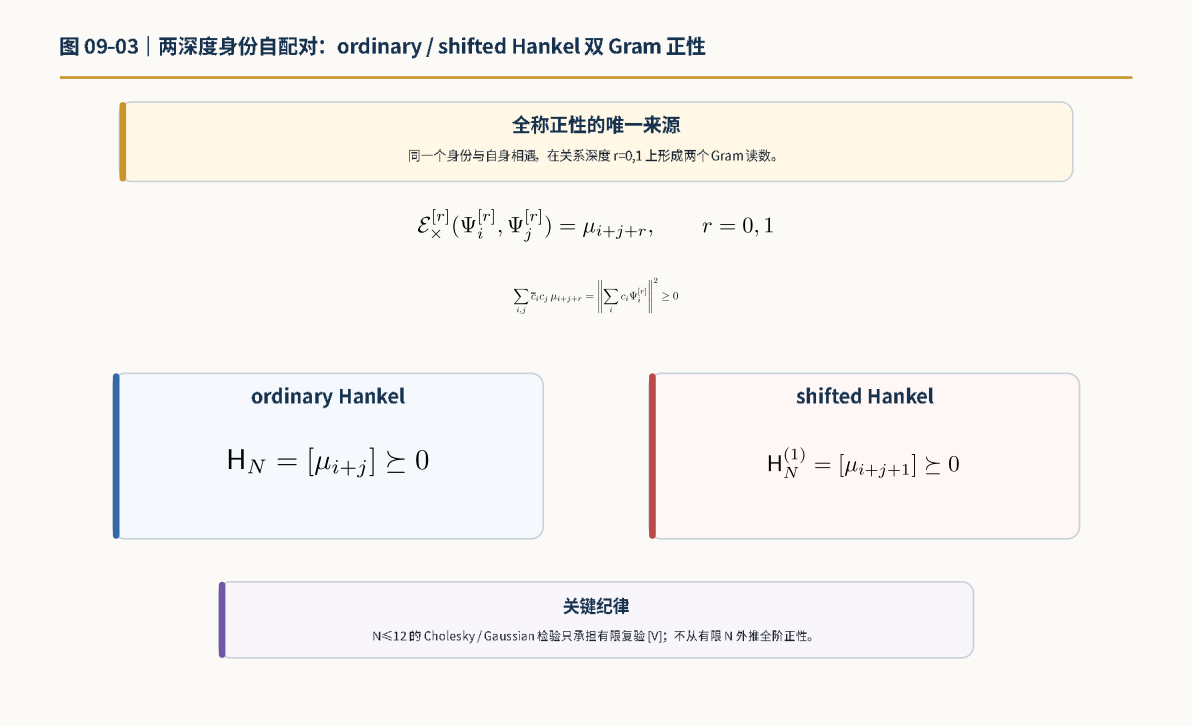


图 09-03　两深度身份自配对。对 $r=0,1$，同一身份自配对满足 $\mathcal{E}_{\times}^{[r]}(\Psi_i^{[r]},\Psi_j^{[r]})=\mu_{i+j+r}$，其二次型直接是 Hilbert 范数平方，因此 ordinary 与 shifted Hankel 表对所有 N 同时半正定。$N\le 12$ 的高精度 Cholesky / Gaussian 计算只承担有限复验 [V]；本章不从有限 N 外推全阶正性。

6. 有限 Source–Krylov 谱截断

第 5 节已经在全称层得到 ordinary / shifted 两族 Hankel 正性；第 8 节的 $N\le 12$ 高精度计算只承担独立有限复验。因此以下有限谱截断公式在全局定理层无条件成立：

$$\mathsf{H}_N\succcurlyeq 0,\qquad \mathsf{H}_N^{(1)}\succcurlyeq 0.$$

若 H_N 非退化，则直接定义

$$\boxed{B_{\times,N}=\mathsf{H}_N^{-1/2}\mathsf{H}_N^{(1)}\mathsf{H}_N^{-1/2}.}\tag{6.1}$$

若 H_N 存在 null directions，则先在身份商

$$\mathcal{P}_{N-1}/\ker\mathsf{H}_N$$

上工作；等价地，可在 $\mathrm{Ran}\mathsf{H}_N$ 上使用 Moore–Penrose inverse。这样得到的有限谱截断仍由同一 pair of Gram tables 唯一确定，并满足

$$\boxed{B_{\times,N}=B_{\times,N}^{*}\geq 0.}\tag{6.2}$$

在其正谱支撑上定义有限 Hilbert–Pólya 读出

$$\boxed{H_{\times,N}=B_{\times,N}^{-1/2}.}\tag{6.3}$$

等价的 generalized eigenvalue problem 为

$$\boxed{\mathsf{H}_N^{(1)}v=\beta\,\mathsf{H}_N v,}\tag{6.4}$$

其中只保留身份商上的 positive generalized eigenvalues $\beta>0$。对应有限谱读数为

$$\boxed{\gamma^{(N)} = \beta^{-1/2}.} \tag{6.5}$$

因此有限谱截断的数学身份是

$$\boxed{B_{\times,N} = \text{同一个生成源侧身份类在有限扫描/Krylov 窗口上的正压缩.}} \tag{6.6}$$

它不是一族新的谱模型，也不承担 RH 的全称证明；其职责是提供有限分辨率读数并与后文 global operator 的 compression theory 对接。

7. 生成输入的独立性

有限谱截断的输入仅由以下生成源数据构成：

$$X$$

及其局部 derivatives。

计算：

$$X \to G \to F \to \mu \to \mathsf{H}_N, \mathsf{H}_N^{(1)} \to B_{\times,N} \to \gamma_j^{(N)}.$$

有限谱截断的输入不含

$$\gamma_j.$$

有限谱截断的输入不含

$$H_{\mathrm{Ren}}.$$

有限谱截断不预装

$$\nu_\times = \sum m_n \gamma_n^{-2} \delta_{\gamma_n^{-2}}$$

作为先验。

因此有限谱截断的恢复是输入意义上独立的。

8. 生成源侧有限截断与独立零点对照

HP 独立通道的有限谱摄影机只使用源生成 X 的局部导数，不输入 Riemann 零点表，也不调用 RH 独立证明的终端零点身份。

已有仅生成源独立对照：

$$N = 2: \quad 14.60686489306,\ 48.64801900795;$$

$$N = 3: \quad 14.15189601461,\ 23.90191976465,\ 78.01695224576;$$

$$N = 4: \quad 14.13509583518,\ 21.54890073193,\ 33.63176075304, \ldots;$$

$$N = 5: \quad 14.13473094478,\ 21.10588451750,\ 27.06733537729, \ldots;$$

$$N = 6: \quad 14.1347251821114,\ 21.0272939502839,\ 25.2906124281783, \ldots;$$

$$N=7:\quad 14.1347251418888,\ 21.0221890679236,\ 25.0335044184750,\ldots;$$

$$N=8:\quad 14.1347251417353,\ 21.0220440879397,\ 25.0128201639747,\ 30.8600444716268,\ldots.$$

计算顺序严格冻结为：

$$X\to F\to \mu_k\to (\mathsf{H}_N,\mathsf{H}_N^{(1)})\to B_{\times,N}\to \gamma_j^{(N)}.$$

HP 输出冻结以后，再与 RH 独立通道得到的终端 ordinates 对照：

$$14.13472514173469\ldots,$$

$$21.02203963877155\ldots,$$

$$25.01085758014569\ldots,$$

$$30.42487612585951\ldots.$$

为使有限谱截断的锁定过程一目了然，将同一组数据整理为：

N	$\gamma_1^{\mathrm{HP}}(N)$	$\gamma_2^{\mathrm{HP}}(N)$	$\gamma_3^{\mathrm{HP}}(N)$	$\gamma_4^{\mathrm{HP}}(N)$
2	14.606864893 06	48.648019007 95	—	—
3	14.151896014 61	23.901919764 65	78.016952245 76	—
4	14.135095835 18	21.548900731 93	33.631760753 04	—
5	14.134730944 78	21.105884517 50	27.067335377 29	—
6	14.134725182 1114	21.027293950 2839	25.290612428 1783	—
7	14.134725141 8888	21.022189067 9236	25.033504418 4750	—
8	14.134725141 7353	21.022044087 9397	25.012820163 9747	30.860044471 6268
RH 独立通道终端	14.134725141 7 3469…	21.022039638 7 7155…	25.010857580 1 4569…	30.424876125 8 5951…

这里不同 N 的高位输出是有限分辨率下的边界读数；表格的意义是观察固定低位身份随 N 增大逐步锁定，而不是把每一列在小 N 时都解释为已经完成的第 k 个 Ritz 身份。

有限维数值核对进一步扩展到 $N=12$。在不调用零点表生成谱截断的情况下，得到：

$$14.134725141734693790 46,\quad 21.022039638771633211 95,\quad 25.010857581584370409 80,$$

$$30.424940053096994435 94,\quad 32.937424169453631820 10,\quad 37.726860710966280945 59,\ldots$$

并且 $\mathsf{H}_N,\mathsf{H}_N^{(1)}$ 在 $1\le N\le 12$ 的 150 位工作精度 Cholesky 检验全部通过；$N=12$ Gaussian 求积权重全部为正，对 $\mu_0,\ldots,\mu_{23}$ 的最大相对矩 residual 约为

$$5.20\times 10^{-150}.$$

作为独立数值稳定性检查，分别使用 contour radius 6 与 10 重新提取 24 个生成源矩，其最大相对差约为

$$1.19\times 10^{-101}.$$

这些有限维计算用于独立复算数值链，并与第 5 节建立的两族全阶 Gram 正性保持一致；全称正性的证明来源是两深度身份自配对定理。

因此这里存在两个彼此独立的读出通道：

RH 独立通道	HP 独立通道
event / analytic closure	生成源矩 / spectral 谱截断
↓	↓
γ_k^{RH}	$\gamma_k^{\mathrm{HP}}(N)$

随着 N 增大，HP 有限谱截断的低位读数向 RH 独立通道的同一终端身份锁定：

$$\gamma_k^{\mathrm{HP}}(N) \to \gamma_k^{\mathrm{RH}}.$$

这里的比较只在两条通道各自完成输出以后进行，因此它是**独立通道之间的交叉见证**，而不是 HP 构造的一部分。

这组结果最重要的含义不是数值精度本身，而是：

> 同一个开放乘法身份， 在两个独立的数学通道中给出同一低位谱地址。

9. Gaussian 求积：有限谱截断的身份与权重读出

有限谱测度：

$$\boxed{\nu_{\times,N} = \sum_{j=1}^{N} w_j^{(N)}\, \delta_{\beta_j^{(N)}}, \qquad w_j^{(N)} > 0.} \tag{9.1}$$

有限预解式：

$$\boxed{F_N(y) = \sum_{j=1}^{N} \frac{w_j^{(N)}}{1 + y\beta_j^{(N)}}.} \tag{9.2}$$

并精确复制：

$$\boxed{\int \beta^r \, d\nu_{\times,N} = \mu_r, \qquad 0 \le r \le 2N - 1.} \tag{9.3}$$

因此有限谱截断输出两类数据：

$$\boxed{\beta_j^{(N)} = \text{身份地址}}$$

与：

$$\boxed{w_j^{(N)} = \text{display weight.}}$$

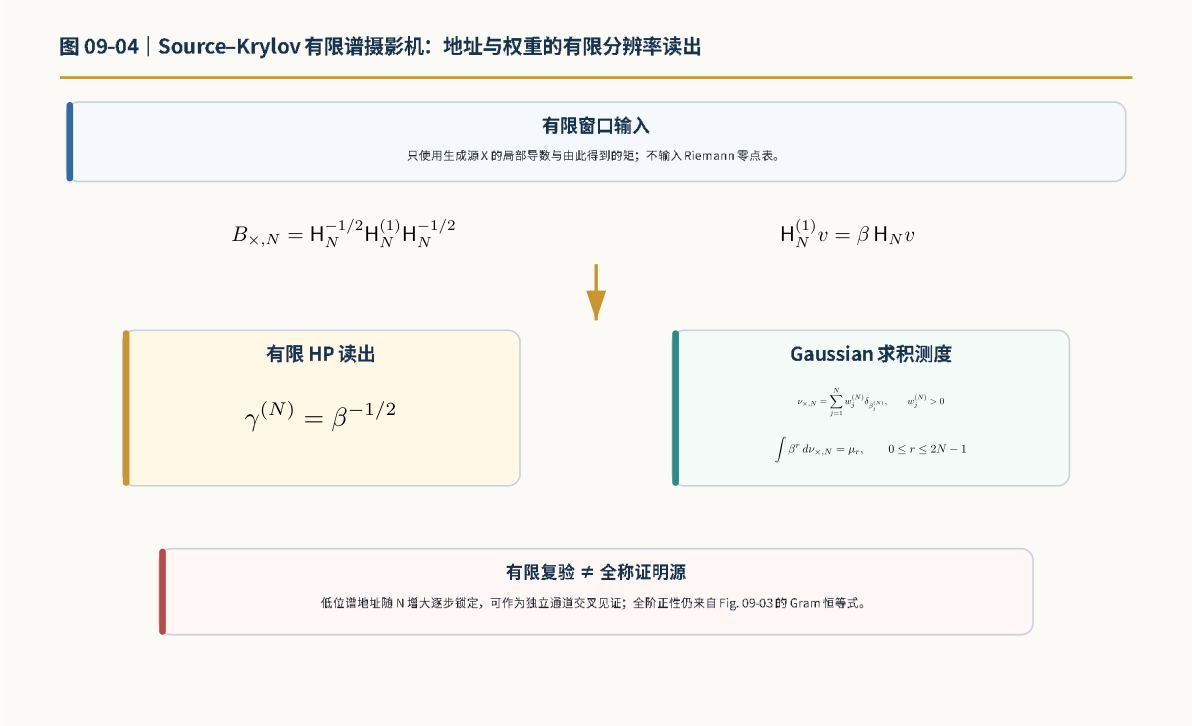


图 09-04　Source–Krylov 有限谱摄影机。普通/位移 Gram 表在有限扫描窗口上形成正压缩 $B_{\times,N}$，其广义本征值 $\beta_j^{(N)}$ 给出有限 HP 地址读数 $\gamma_j^{(N)} = (\beta_j^{(N)})^{-1/2}$。Gaussian 求积同时给出正权重 $w_j^{(N)}$，并精确复制前 $2N$ 个矩。该摄影机不输入 Riemann 零点表；随 N 增大的低位锁定只作为独立通道交叉见证，不承担全称正性的证明来源。

10. 双 Gram 正性与 Stieltjes 重构

由第 5 节，两族全阶 Hankel 正性已同时为：

$$\mathcal{E}_\times(\Psi_i, \Psi_j) = \mu_{i+j}, \qquad \mathcal{E}_\times^{[1]}(\Psi_i^{[1]}, \Psi_j^{[1]}) = \mu_{i+j+1},$$

其中 ordinary 与 shifted 正性都来自同一身份自配对的两族 Gram realization。于是：

$$\mathcal{L}_\times(|p|^2) \ge 0,$$

$$\mathcal{L}_\times(\beta|p|^2) \ge 0.$$

由 Stieltjes 矩定理，存在正测度 $\nu_\times$ 使：

$$\boxed{\mu_k = \int_0^\infty \beta^k \, d\nu_\times(\beta).} \tag{10.1}$$

唯一性由解析性与局部 germ 决定。因为 F 在 $y = 0$ 的某个圆盘内解析，设其 Taylor 收敛半径为 $R_0 > 0$。对任意 $0 < r < R_0$，Cauchy 估计给出常数 C_r 使：

$$0 \le \mu_k \le C_r\, r^{-k}.$$

若 $\nu_\times$ 在某个 $\beta_0 > r^{-1}$ 之外有正质量，则其第 k 阶矩至少按 β_0^k 增长，与上述估计矛盾。因此：

$$\mathrm{supp}\nu_\times \subset [0, R_0^{-1}],$$

按 $r \uparrow R_0$ 理解端点。故 $\nu_\times$ 为紧支撑 Stieltjes 测度，矩 problem 是 determinate（确定的），因此该正测度唯一。

定义其 Stieltjes response：

$$S_\times(y) = \int \frac{d\nu_\times(\beta)}{1 + y\beta}.$$

在 $y = 0$ 的共同解析邻域内，

$$S_\times(y) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \mu_k y^k = F(y).$$

由解析唯一性，$S_\times$ 与生成源定义的 F 是同一个解析 germ 的全局延拓。

因此 $\nu_\times$ 不是新的生成机制；它是同一扫描自配对在 multiplication re 表示下的唯一正谱测度。

11. 全局 Hilbert 空间

在 Stieltjes 表示中：

$$\boxed{\mathcal{H}_\times = L^2(\nu_\times).} \tag{11.1}$$

定义：

$$\boxed{(B_\times f)(\beta) = \beta f(\beta).} \tag{11.2}$$

于是：

$$\boxed{B_\times = B_\times^* \geq 0.} \tag{11.3}$$

取向量：

$$\mathbf{1}(\beta) = 1.$$

由于第 10 节给出的 $\nu_\times$ 具有紧支撑，多项式在 $C(\mathrm{supp}\nu_\times)$ 中由 Stone–Weierstrass 定理稠密，而连续函数在 $L^2(\nu_\times)$ 中稠密。因此：

$$\overline{\mathrm{span}\{\mathbf{1}, B_\times\mathbf{1}, B_\times^2\mathbf{1}, \dots\}} = L^2(\nu_\times).$$

所以 $\mathbf{1}$ 是 $B_\times$ 的 cyclic vector。

有：

$$\boxed{\mu_n = \langle B_\times^n \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle.} \tag{11.4}$$

从而：

$$\boxed{\mu_{i+j} = \langle B_\times^i \mathbf{1}, B_\times^j \mathbf{1}\rangle.} \tag{11.5}$$

这时所谓 Gram architecture 自动出现。

它是结论，不是起点。

12. Krylov 空间：有限扫描的标准算子形式

定义：

$$\boxed{\mathcal{K}_N = \mathrm{span}\{\mathbf{1}, B_\times \mathbf{1}, \dots, B_\times^{N-1}\mathbf{1}\}.} \tag{12.1}$$

令 P_N 为正交投影。

定义压缩：

$$\boxed{\hat{B}_N = P_N B_\times P_N|_{\mathcal{K}_N}.} \tag{12.2}$$

在对称正交化的 monomial basis 下：

$$\hat{B}_N \sim \mathrm{H}_N^{-1/2}\mathrm{H}_N^{(1)}\mathrm{H}_N^{-1/2}.$$

所以：

$B_{\times,N}$不是 fitted matrix；　　它是同一个$B_\times$的规范 Krylov compression。

13. 有限谱截断到完整无限谱的恢复

本节处理第二类有限技术：谱分辨率参数 N。

与第 4 节的视界参数 r 不同，N 表示矩/Krylov 谱截断的有限维扫描分辨率。完整生成源侧身份类与全局算子 $B_\times$ 已经由同一无限对象定义；有限谱截断的任务不是制造一个新的有限模型，而是在越来越大的 Krylov 子空间中读取这一完整对象。

两项技术严格区分为：

	有限参数	数学性质
截断视界	r	逐个r的精确身份恒等
谱摄影机	N	$N \to \infty$的完整谱恢复

因此：

r-技术解决“是不是同一个对象”；

N-技术解决“有限扫描怎样读出完整无限谱”。

由第 11 节的 cyclicity：

$$\boxed{\overline{\bigcup_{N\geq 1} \mathcal{K}_N} = L^2(\nu_\times).} \tag{13.1}$$

故相应正交投影满足：

$$P_N \to I$$

强收敛。

第 4 节将证明 $\nu_\times$ 为纯原子测度，且其非零原子只能以 0 为聚点；因此 multiplication operator $B_\times$ 为正紧算子。对紧算子与强收敛投影，有：

$$\| (I - P_N)B_\times \| \to 0, \qquad \| B_\times(I - P_N) \| \to 0.$$

于是把 $P_N B_\times P_N$ 视为全空间上的有限秩算子，有：

$$\boxed{\| P_N B_\times P_N - B_\times \| \to 0.} \tag{13.2}$$

这已经是对完整无限维有界算子 $B_\times$ 的 operator-norm recovery，而不是只恢复某个有限低谱窗口。

由紧自伴算子的谱逼近定理，按非增次序排列**不同的非零原子地址**（解析重数由第 6 节的权重/留数另行恢复），则对每个固定 $k \in \mathbb{N}$：

$$\boxed{\beta_k^{(N)} \to \beta_k.} \tag{13.3}$$

量词是：

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}.}$$

因此全部离散谱地址都被恢复。令：

$$\gamma_k = \beta_k^{-1/2}, \qquad \gamma_k^{(N)} = (\beta_k^{(N)})^{-1/2},$$

则对每个 k：

$$\boxed{\gamma_k^{(N)} \to \gamma_k.} \tag{13.4}$$

于是有限谱截断的极限恢复的是整个无限序列：

$$\boxed{\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}.}$$

全局 Hilbert–Pólya 算子并不通过“有界算子范数极限”定义，而是直接由完整 $B_\times$ 的谱演算定义：

$$\boxed{H_\times = B_\times^{-1/2}.} \tag{13.5}$$

其完整定义域为：

$$D(H_\times) = \left\{ f : \int \beta^{-1} |f(\beta)|^2 \, dv_\times(\beta) < \infty \right\}.$$

在纯点表示中即：

$$D(H_\times) = \left\{ (a_n) : \sum_n \gamma_n^2 \, |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

因此本章的“有限到全局”终点是一个完整的无限维无界自伴算子及其全部无限谱，而不是某个固定有限 sector。

无界算子的全局极限采用适合谱演算的拓扑表达。$B_{\times,N}$ 在有界紧算子层面作 operator-norm 收敛，而 $H_{\times,N} = B_{\times,N}^{-1/2}$ 在固定谱窗口及相应预解式/谱投影意义下收敛到完整无界 $H_\times$。对任何固定有限谱投影 P_K^{spec}，可选择相应的谱子空间识别 U_N，使：

$$\boxed{\| (U_N H_{\times,N} U_N^{-1} - H_\times) P_K^{\mathrm{spec}} \| \to 0.} \tag{13.6}$$

等价地，完整无限谱由 (13.3)–(13.6) 对所有 k 的恢复来刻画。

14. 亚纯性与离散原子谱

由第 10 节，Stieltjes response

$$S_{\times}(y) = \int \frac{d\nu_{\times}(\beta)}{1 + y\beta}$$

与生成源定义的

$$F(y) = \frac{G'(y)}{G(y)}$$

在 $y = 0$ 的邻域内相等，并由解析唯一性属于同一个全局亚纯函数。

为把谱测度的结构读出来，令：

$$y = -\frac{1}{z}.$$

则：

$$F(-1/z) = z\int \frac{d\nu_{\times}(\beta)}{z - \beta}.$$

因此 $\nu_{\times}$ 的 Cauchy 变换为：

$$\boxed{C_{\nu_{\times}}(z) = \int \frac{d\nu_{\times}(\beta)}{z - \beta} = \frac{1}{z}F(-1/z).} \tag{14.1}$$

右侧在 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上是亚纯 function。由正测度的 Stieltjes inversion（等价地 Cauchy-transform inversion），任何非原子连续部分都会在其支撑上产生非离散的边界跳跃；而亚纯 Cauchy 变换的有限平面奇点只能是孤立极点。因此 $\nu_{\times}$ 没有连续部分，其非零支撑由离散原子组成。

于是：

$$\boxed{\nu_{\times} = \nu_{\times}(\{0\})\delta_0 + \sum_n w_n\,\delta_{\beta_n}, \qquad w_n > 0, \quad \beta_n > 0.} \tag{14.2}$$

还需排除 0 原子。沿正实轴 $y \to +\infty$，由 completed ξ 的 Stirling 渐近，

$$F(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{X'(\sqrt{y})}{X(\sqrt{y})} \to 0.$$

另一方面，对紧支撑正测度，由 dominated convergence：

$$\lim_{y\to+\infty}\int \frac{d\nu_{\times}(\beta)}{1 + y\beta} = \nu_{\times}(\{0\}).$$

故：

$$\nu_{\times}(\{0\}) = 0.$$

最终：

$$\boxed{\nu_\times = \sum_n w_n\,\delta_{\beta_n}, \qquad w_n > 0, \quad \beta_n > 0.} \tag{14.3}$$

由于右侧 Cauchy 变换亚纯，任意非零原子序列在 $(0,\infty)$ 内不能有聚点；结合紧支撑，唯一可能的聚点是 0。因此 $B_\times = M_\beta$ 是正紧算子。

对应地：

$$F(y) = \sum_n \frac{w_n}{1 + y\beta_n}.$$

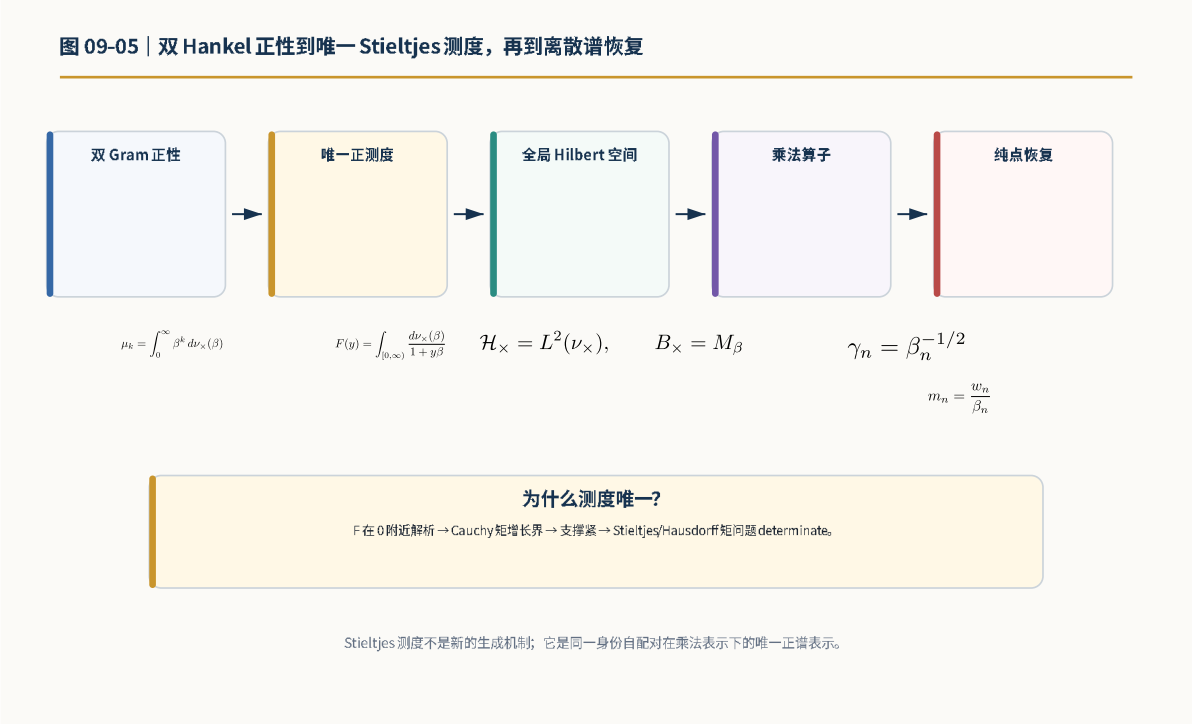


图 09-05　从双 Hankel 正性到离散谱。两族全阶 Gram 正性触发 Stieltjes 矩定理，得到正测度 $\nu_\times$；F 在 0 邻域的解析性给出矩增长界，从而把测度支撑压到紧区间并保证矩问题 determinate。于是 $\nu_\times$ 唯一，$\mathcal{H}_\times = L^2(\nu_\times)$、$B_\times = M_\beta$ 随之形成；再由 $F = G'/G$ 的亚纯结构把测度恢复为纯点原子，并分别读出 γ_n 与 m_n。

15. 零点恢复

由：

$$F = \frac{G'}{G},$$

而 G 是整函数且 $G(0) = 1$。若 y_0 是 G 的 m 重零点，则局部可写成

$$G(y) = (y - y_0)^m h(y), \qquad h(y_0) \neq 0,$$

从而：

$$F(y) = \frac{m}{y - y_0} + \frac{h'(y)}{h(y)}.$$

反之，因 G 没有极点，$F = G'/G$ 的每个有限极点都来自 G 的零点。因此：

$$\boxed{y_0 \in Z(G) \Leftrightarrow y_0 \in \mathrm{Pole}(F),}$$

且 F 在该点的 residue 等于零点重数。

第 4 节已经证明 Stieltjes 表示的全部有限极点只能位于负实轴上的

$$y = -\beta_n^{-1}.$$

故 G 的全部零点均位于这些点。

标准 Riemann–von Mangoldt counting formula 给出 ξ 的非平凡零点数随高度趋于无穷，因此这些谱地址构成无限序列。相应地：

$$\gamma_n \to \infty, \qquad \beta_n = \gamma_n^{-2} \to 0.$$

极点位置：

$$y = -\beta_n^{-1}.$$

定义：

$$\boxed{\gamma_n = \beta_n^{-1/2}.} \tag{15.1}$$

则：

$$y = -\gamma_n^2.$$

而：

$$y = z^2.$$

因此：

$$\boxed{z = \pm i\gamma_n.} \tag{15.2}$$

所以：

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2} \pm i\gamma_n.} \tag{15.3}$$

因此，由第 5 节两族自配对 Gram 正性，这条生成源到谱链严格构成 HP→RH 闭合。

16. 解析重数恢复

若 G 在：

$$y = -\beta_n^{-1}$$

有重数 m_n，则：

$$\mathrm{Res} F = m_n.$$

而：

$$\mathrm{Res}_{y=-\beta_n^{-1}} \frac{w_n}{1+y\beta_n} = \frac{w_n}{\beta_n}.$$

因此：

$$\boxed{m_n = \frac{w_n}{\beta_n}.} \tag{16.1}$$

即：

$$\boxed{w_n = m_n\beta_n.} \tag{16.2}$$

所以身份与 multiplicity 自动分离：

$$\boxed{\beta_n = \text{身份地址},}$$

$$\boxed{m_n = \text{analytic display strength.}}$$

由此立即定义 multiplicity display operator

$$\boxed{M_\times e_n = m_n e_n.} \tag{16.3}$$

于是源生成身份层终端从这一节起固定为

$$\boxed{(H_\times, M_\times).} \tag{16.4}$$

其中 $H_\times$ 每个 distinct 谱身份只出现一次，$M_\times$ 独立保存解析重数；Stieltjes 原子权重为 $m_n\beta_n$，不与循环本征空间维数混同。

17. 全局 Hilbert–Pólya 算子

定义：

$$\boxed{H_\times = B_\times^{-1/2}.} \tag{17.1}$$

在离散表示：

$$H_\times e_n = \gamma_n e_n.$$

定义域：

$$D(H_\times) = \left\{(a_n): \sum_n \gamma_n^2 \, |a_n|^2 < \infty\right\}.$$

于是：

$$\boxed{H_\times = H_\times^*.} \tag{17.2}$$

而且：

$$\boxed{\sigma(H_\times) = \{\gamma_n\}.} \tag{17.3}$$

并且：

$$\gamma_n \to \infty,$$

所以 $H_\times$ 是具有纯离散实谱的无界正自伴算子。

这里的 self-adjointness 不是预装。

它来自生成源侧身份类自配对经谱定理后的标准表示。

18. 除子保真放大

身份保真 pair 为

$$H_\times e_n = \gamma_n e_n, \qquad M_\times e_n = m_n e_n, \qquad [H_\times, M_\times] = 0. \tag{18.1}$$

这里 $H_\times$ 的循环表示每个 distinct atom 只给一个谱地址；解析重数由 $M_\times$ 独立显示。

定义 multiplicity amplification

$$\boxed{\widetilde{H}_\times = \mathrm{Amp}_{M_\times}(H_\times) = \oplus_n \gamma_n I_{m_n}.} \tag{18.2}$$

于是

$$\boxed{\mathrm{dimker}(\widetilde{H}_\times - \gamma_n I) = m_n.} \tag{18.3}$$

这一区分同时冻结三个不同层级：

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{event sheet number} & : & \text{有限 reciprocal lift 的叶数,} \\ \text{支撑地址计数} & : & \text{distinct 原子地址，一次,} \\ \text{解析重数} & : & m_n. \end{array}} \tag{18.4}$$

Stieltjes 原子权重为

$$\nu_\times(\{\beta_n\}) = m_n \beta_n,$$

它编码 m_n，但 scalar multiplication operator 在一个 distinct atom 上的 cyclic eigenspace 仍是一维。只有除子保真 amplification 才把解析重数变成 eigenspace dimension。

因此：

$$\boxed{\text{all zeros simple} \Leftrightarrow M_\times = I \Leftrightarrow \widetilde{H}_\times \simeq H_\times \text{at the multiplicity level.}} \tag{18.5}$$

本章不预设 simple zeros。

19. Fredholm 行列式

因为：

$$\sum_n m_n \beta_n = \sum_n w_n = \nu_\times([0,\infty)) = \mu_0 = F(0) < \infty,$$

故：

$$\tilde{B}_\times$$

为正迹类。

于是：

$$\det(I + y\tilde{B}_\times) = \prod_n (1 + y\beta_n)^{m_n}.$$

其 logarithmic derivative：

$$\frac{d}{dy}\log\det(I+y\tilde{B}_\times)=\sum_n \frac{m_n\beta_n}{1+y\beta_n}=F(y).$$

又：

$$G(0)=1.$$

因此两边在 $y=0$ 的某个邻域具有相同对数导数与相同归一化值，故在该邻域相等；由于两边均为整函数，由恒等定理得到全局相等：

$$\boxed{G(y)=\det(I+y\tilde{B}_\times).} \tag{19.1}$$

即：

$$\boxed{\frac{X(z)}{X(0)}=\det(I+z^2\tilde{B}_\times).} \tag{19.2}$$

这样：

生成源 → 身份 → spectrum → determinant → 生成源

完整闭环。

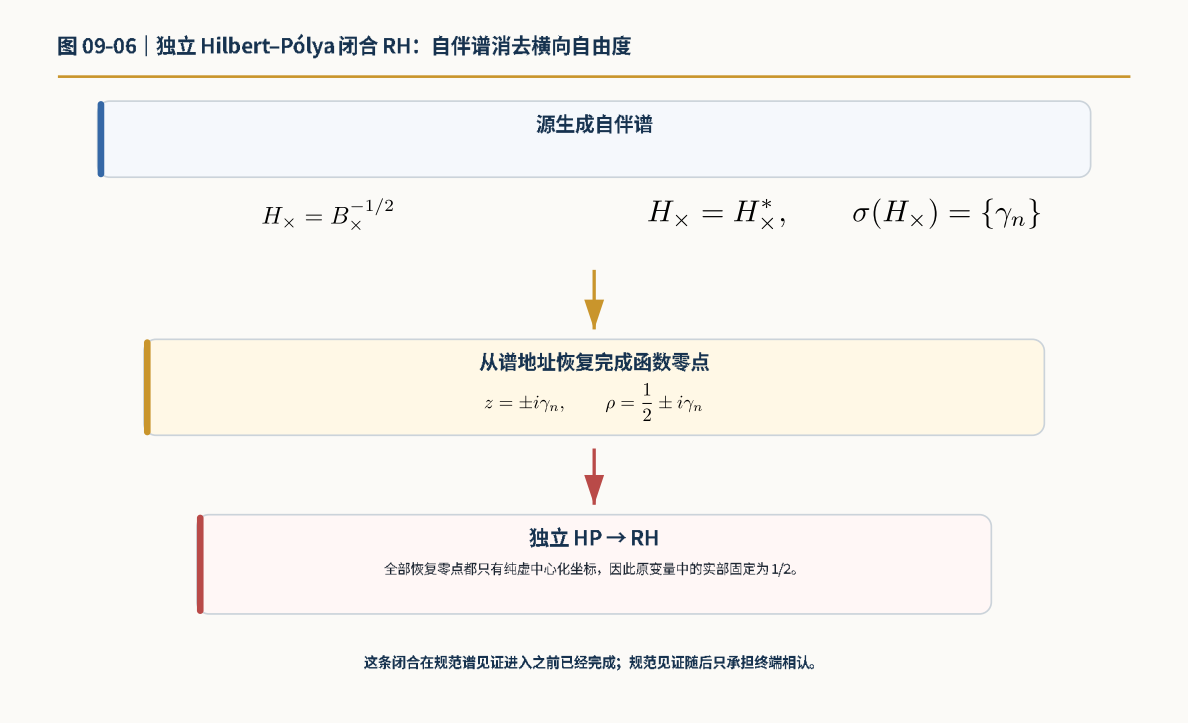


图 09-06　独立 Hilbert–Pólya 闭合 RH。由 $B_\times = M_\beta$ 定义 $H_\times = B_\times^{-1/2}$，得到正自伴纯离散谱 $\{\gamma_n\}$。Stieltjes 极点恢复给出 $z=\pm i\gamma_n$，故原变量零点为 $\rho=\frac{1}{2}\pm i\gamma_n$。因此 RH 在规范谱见证进入之前已经由生成源侧自配对—Stieltjes—自伴谱链闭合；规范见证随后只负责终端相认。

20. 规范谱见证：身份层相认与除子放大

HP 生成链已经给出生成源侧 cyclic response

$$F_{\times}(y) = \langle (I + yB_{\times})^{-1}\mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle,$$

并由同一 completed 生成源得到

$$F_{\times} = F_{\mathrm{R}} = \frac{d}{dy}\log\frac{X(\sqrt{y})}{X(0)}. \tag{20.1}$$

Riemann 规范谱见证的唯一性定理因而直接给出带基点的酉等价

$$\boxed{(B_{\times}, \mathbf{1}) \simeq (B_{\mathrm{R}}, \mathbf{1}).} \tag{20.2}$$

经 Borel functional calculus，

$$H_{\times} = B_{\times}^{-1/2} \simeq B_{\mathrm{R}}^{-1/2} = H_{\mathrm{id}}. \tag{20.3}$$

同时原子权重唯一恢复解析重数，因此

$$\boxed{(H_{\times}, M_{\times}) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}).} \tag{20.4}$$

这一步是身份保真终端相认。它不把 cyclic 身份层 realization 与除子保真 operator 混为一谈。

再做 multiplicity amplification：

$$\boxed{\widetilde{H}_{\times} = \mathrm{Amp}_{M_{\times}}(H_{\times}) \simeq \mathrm{Amp}_{M_{\mathrm{mult}}}(H_{\mathrm{id}}) = H_{\mathrm{Ren}}.} \tag{20.5}$$

这里

$$\boxed{H_{\mathrm{Ren}} := K_{\mathrm{Ren}}|_{\mathrm{RH}}} \tag{20.6}$$

是 RH 后的**规范黎曼谱算子（规范 Riemann 谱算子；Ren－Riemann 算子）**；K_{Ren} 是 RH 前的全坐标任毅飞算子（Yifei Ren operator / 全坐标 Ren 算子）。本章不使用 K_{Ren} 生成 HP 谱。

因此终端结构必须写成两级：

$$\boxed{(H_{\times}, M_{\times}) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})}$$

和

$$\boxed{\widetilde{H}_{\times} \simeq H_{\mathrm{Ren}}.}$$

直接写 $H_{\times} \simeq H_{\mathrm{Ren}}$ 会把 distinct 身份与 divisor multiplicity 两个层级压成一个对象；本章不采用该简写。

规范谱见证在本章中的职责仅是**终端相认**。生成源侧自配对、Stieltjes reconstruction、自伴谱生成与 RH 闭合在它进入之前已经完成。

21. 生成源谱与规范 Riemann 谱的终端相认

两条路线从同一个开放乘法身份出发，但使用不同的成熟数学语言：

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{R}_\times & \\
\swarrow & & \searrow \\
\text{RH 解析/事件路线} & & \text{HP 谱路线} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{互反零点事件闭合} & & \text{根乘法身份自配对} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\{\gamma_n, m_n\}_{\mathrm{RH}} & & (H_\times, M_\times) \\
\searrow & & \swarrow \\
 & (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) & \\
 & \downarrow & \\
 & H_{\mathrm{Ren}} \text{ after amplification} &
\end{array}
\tag{21.1}
$$

HP 路线不需要借用 RH 端的零点名单来构造 $H_\times$。终端相认使用的是标量完备见证：

$$F_\times = F_{\mathrm{R}} \Rightarrow (H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}).$$

这使“同一个 Riemann 谱身份”成为一个可由完整 scalar response 判定的规范命题，而不是逐个谱点的后验匹配。

因此：

$$\boxed{\text{生成独立} \quad + \quad \text{终端可唯一相认}} \tag{21.2}$$

同时成立。

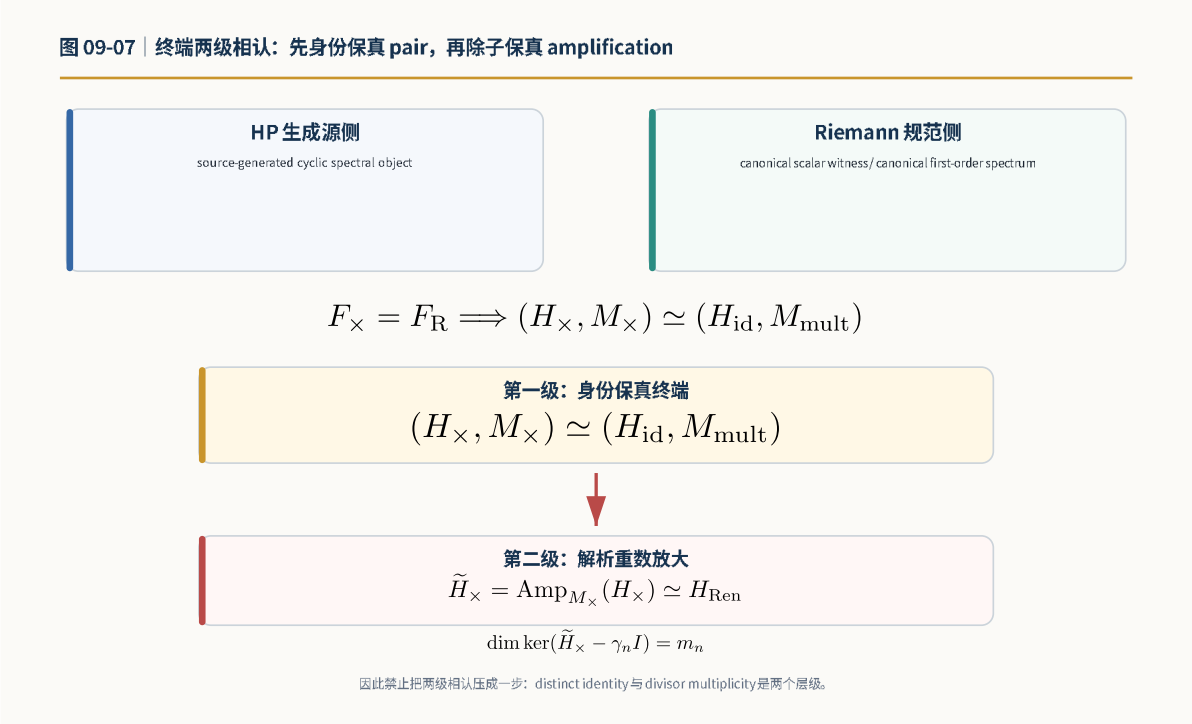


图 09-07　终端两级相认。完整标量见证首先把源生成 pair 与 Riemann 规范身份层相认为 $(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$。随后才用同一解析重数数据作 multiplicity amplification，得到 $\widetilde{H}_\times \simeq H_{\mathrm{Ren}}$，并使 eigenspace dimension 等于 m_n。因此不能把这两级压缩成错误简写 $H_\times \simeq H_{\mathrm{Ren}}$。

22. 独立 Hilbert–Pólya → RH 主证明链

HP 路线的生成方向完全来自开放乘法生成源、完成化、身份商与生成源侧 self-relation。RH 事件闭合、零点名单、K_{Ren}、H_{Ren} 与 Riemann 规范谱见证均不进入这一生成方向。

第 4–5 节严格得到两族同一身份自配对：

$$\boxed{\mathcal{E}_{\times}^{[r]}(\Psi_i^{[r]},\Psi_j^{[r]})=\mu_{i+j+r},\qquad r=0,1,} \tag{22.1}$$

从而

$$\boxed{\mathsf{H}_N\succcurlyeq 0,\qquad \mathsf{H}_N^{(1)}\succcurlyeq 0\qquad \forall N.} \tag{22.2}$$

因此 Stieltjes 矩定理直接给出唯一正测度

$$F(y)=\int\frac{d\nu_{\times}(\beta)}{1+y\beta},\qquad \nu_{\times}\geq 0. \tag{22.3}$$

随后由 $F=G'/G$ 的亚纯性、纯点 recovery 与

$$B_{\times}=M_{\beta},\qquad H_{\times}=B_{\times}^{-1/2},$$

严格得到

$$H_{\times}=H_{\times}^{*},\qquad z=\pm i\gamma_n,\qquad \rho=\frac{1}{2}\pm i\gamma_n. \tag{22.4}$$

故

$$\boxed{\mathrm{RH}.} \tag{22.5}$$

当前主链为

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{R}_{\times}\\ \Downarrow\\ [\Omega]_{\mathrm{id}}\\ \Downarrow\\ X\to F\to\mathcal{L}_{\times}\\ \Downarrow\\ \text{same-身份自配对 at}\,r=0,1\\ \Downarrow\\ \mathsf{H}_N\succcurlyeq 0,\quad \mathsf{H}_N^{(1)}\succcurlyeq 0\quad \forall N\\ \Downarrow\\ \nu_{\times}\geq 0\to H_{\times}=H_{\times}^{*}\to z=\pm i\gamma\to\boxed{\mathrm{RH}}.\end{array}} \tag{22.6}$$

规范谱见证严格后置：

$$(H_{\times},M_{\times})\simeq(H_{\mathrm{id}},M_{\mathrm{mult}})\to\widetilde{H}_{\times}\simeq H_{\mathrm{Ren}}. \tag{22.7}$$

它只负责终端相认，不参与源生成 HP⇒RH 的生成与证明。

23. 身份保持后的结构压缩

本章的表示层身份一致性在第 4 节被统一闭合；第 5 节只处理标准解析正性。其核心事实是：

$$\boxed{\text{根乘法身份自配对}\equiv\text{矩扫描配对}.} \tag{23.1}$$

移动视界已由身份商处理：

$$[\Psi_r] = [\Omega]_{\mathrm{id}}.$$

完成化 fidelity 已给出

$$X_r = X, \qquad G_r = G, \qquad F_r = F.$$

矩由同一个 F 唯一给出：

$$\mu_k = \frac{(-1)^k}{k!} F^{(k)}(0).$$

扫描组合给出

$$T_\times^i T_\times^j = T_\times^{i+j}.$$

生成源自配对的坐标保真给出

$$\mathcal{E}_\times(\Psi_i, \Psi_j) = \mu_{i+j}, \qquad \mathcal{E}_\times^{[1]}(\Psi_i^{[1]}, \Psi_j^{[1]}) = \mu_{i+j+1}.$$

因此 ordinary 与 shifted Hankel 的正性都是同一身份自配对的标准 Gram 后果。区别只在关系深度标签 $r = 0,1$，不在身份、不在生成源，也不需要额外引入“一步扫描自身为正”的新证明对象。有限维数值截断只验证这些全称定理的有限截面。

这也解释了为什么有限矩阵是主块、为什么反对角线由同一个矩标记，以及为什么增加 N 只是扩大可见坐标窗口：

> 可见范围改变，身份保持不变。
>
> (23.2)

24. 与第八章二阶谱关系的接口

本章只需要一条二阶接口。

由终端见证已经得到

$$\boxed{(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}).} \tag{24.1}$$

设 U 实现这一酉等价：

$$UH_\times U^{-1} = H_{\mathrm{id}}, \qquad UM_\times U^{-1} = M.$$

则对任何使相关算子为 trace class 的窗口 ϕ 及任意 $u \in \mathbb{R}$，酉不变性给出

$$\mathrm{Tr}\big[M_\times \phi(H_\times) e^{iuH_\times}\big] = \mathrm{Tr}\big[M_{\mathrm{mult}} \phi(H_{\mathrm{id}}) e^{iuH_{\mathrm{id}}}\big]. \tag{24.2}$$

因此：

$$\boxed{(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \Rightarrow \mathcal{P}_2(H_\times, M_\times) = \mathcal{P}_2(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),} \tag{24.3}$$

其中 $\mathcal{P}_2$ 表示由 functional calculus、trace、signed doubling 与 Fourier–Plancherel construction 形成的全部 unitary-invariant second-order observable family。

第八章已经区分二阶结构的三个层级：

$$\boxed{\begin{aligned} &G0\text{:}\quad \text{二阶见证继承：由一阶酉等价精确推出,}\\ &G1\text{:}\quad \text{有限尺度重整化握手：第八章的下游结构,}\\ &G2\text{:}\quad \text{经典无限 GUE 渐近：更强的渐近特化.} \end{aligned}} \tag{24.4}$$

因此二阶理论位于本章 Hilbert–Pólya ⇒ RH 闭合之后；一阶酉等价已经足以把全部酉不变二点观测传递到第八章。

25. 定理依赖与对象层级

模块	数学内容
IP0	单一身份闭合包
IP1	移动视界身份保持：$[\Psi_r] = [\Omega]_{\mathrm{id}}$
IP2	完成化身份保真：$X_r = X,\ G_r = G,\ F_r = F$
IP3	矩与扫描泛函来源：$\mathcal{L}_{\times}(\beta^n) = \mu_n$
IP4	多重扫描显现：$\Psi_n = T_{\times}^n \Psi_0$
IP5	总深度律：$(i,j) \mapsto i+j$，shifted 为 $i+j+1$
IP6	ordinary / shifted Hankel 为同一身份关系的两张坐标表
IP7	有限扫描窗口为同一身份的限制
G0	ordinary 身份自配对与 Gram 正性
G1	shifted 身份自配对与 Gram 正性
G2	全阶 ordinary Hankel 正性
G3	全阶 shifted Hankel 正性
P2	唯一有限正 Stieltjes 测度
P3	亚纯 Cauchy 变换 ⇒ 纯点测度
P4	支撑 ⇒ γ_n
P5	原子权重/留数 ⇒ m_n
P6	$H_{\times} = B_{\times}^{-1/2}$ 自伴
P7	零点恢复 ⇒ RH
M0	$M_{\times} e_n = m_n e_n$
M1	除子保真放大 $\widetilde{H}_{\times}$
K0	有限 Source–Krylov 截断与广义本征值读出；$N \le 12$ 给出数值核对
K1	紧算子 $B_{\times}$ 的有限截断收敛
K2	固定序号本征值恢复
R0	$(H_{\times}, M_{\times}) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}})$ 的规范见证相认
R1	$\widetilde{H}_{\times} \simeq H_{\mathrm{Ren}}$
Q0	二阶见证继承
Q1	第八章的有限尺度重整化握手继承
Q2	经典无限 GUE 渐近特化

IP0–IP7 与 G0–G3 共同表达同一根乘法身份在不同表示和两个关系深度上的自配对结构。有限维数值核对只检验相应有限截面；全阶正性由第 5 节的 Gram 恒等式给出。

26. 生成独立性与终端相认

本章生成方向固定为

$$\boxed{\mathcal{R}_{\times} \to X \to F \to \mathcal{L}_{\times} \to (\mathcal{E}_{\times}, T_{\times}) \to \nu_{\times} \to B_{\times} \to (H_{\times}, M_{\times}).} \tag{26.1}$$

这一顺序给出四个非循环约束。

第一，生成源侧身份类先于任何谱坐标：

$$\Psi_{r+1}-\Psi_r\in\ker S,\qquad [\Psi_r]=[\Omega]_{\mathrm{id}}.$$

第二，矩来自已经由生成源完成化确定的

$$F(y)=\frac{G'(y)}{G(y)},$$

而不是从零点名单读入：

$$\mu_k=\frac{(-1)^k}{k!}F^{(k)}(0).$$

第三，生成源侧身份自配对先于 Hankel 表，而且 ordinary / shifted 两族同时由同一生成源内禀 Hilbert 自配对给出：

$$\mathcal{E}_{\times}^{[r]}(\Psi_i^{[r]},\Psi_j^{[r]})=\mu_{i+j+r},\qquad r=0,1.$$

因此两族正性都来自上游自配对，而不是从 Hankel 矩阵反向定义内积；也不存在一个需要额外证明为正的“一次扫描算子”。

第四，有限谱截断的输入只来自 X 及其 derivatives：

$$X(0),X''(0),X^{(4)}(0),\dots$$

$$\boxed{\{\gamma_n\},\quad K_{\mathrm{Ren}},\quad H_{\mathrm{Ren}}\text{均不进入谱截断构造.}} \tag{26.2}$$

最后，规范谱见证位于生成链之后：

$$(H_{\times},M_{\times})\overset{\text{见证}}{\simeq}(H_{\mathrm{id}},M_{\mathrm{mult}})\to\widetilde{H}_{\times}\simeq H_{\mathrm{Ren}}. \tag{26.3}$$

因此 Riemann 规范谱见证承担终端相认，第八章的二阶见证继承承担下游二阶结构传递。

27. 主定理体系

定理 A｜单一身份闭合包

开放乘法关系 $\mathcal{R}_{\times}$ 的移动视界表示、身份商、完成化、$X/G/F$、矩泛函、多重扫描显现、ordinary / shifted 关系坐标与有限扫描窗口，均来自同一根乘法身份 $\mathfrak{I}_{\times}$，并通过生成源侧身份类 $\mathfrak{C}_{\times}$ 保持一致。特别地：

$$\boxed{[\Psi_r]=[\Omega]_{\mathrm{id}},\quad X_r=X,\quad G_r=G,\quad F_r=F,}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{\times}(\beta^n)=\mu_n,\qquad T_{\times}^iT_{\times}^j=T_{\times}^{i+j},}$$

以及

$$\boxed{\mathsf{H}_N=[\mu_{i+j}],\qquad \mathsf{H}_N^{(1)}=[\mu_{i+j+1}].}$$

该定理一次性结束本章所有身份匹配条件。

定理 B｜两深度身份自配对与 Gram 正性定理

令 $\Psi_i^{[r]}$ 表示同一生成源侧身份类在关系深度 $r = 0,1$ 下的第 i 个扫描显现，则

$$\boxed{\mathcal{E}_\times^{[r]}(\Psi_i^{[r]}, \Psi_j^{[r]}) = \mathcal{L}_\times(\beta^{i+j+r}) = \mu_{i+j+r}, \qquad r = 0,1.}$$

因此

$$\boxed{\sum_{i,j} \bar{c}_i\, c_j \mu_{i+j+r} = \left\| \sum_i c_i\, \Psi_i^{[r]} \right\|^2 \geq 0, \qquad r = 0,1,}$$

从而

$$\boxed{\mathsf{H}_N \succcurlyeq 0, \qquad \mathsf{H}_N^{(1)} \succcurlyeq 0 \quad \forall N.}$$

定理 C｜全局 Stieltjes 重构

由定理 B 的两族 Hankel 正性，存在唯一有限正测度 $\nu_\times$ 使

$$\boxed{F(y) = \int_{[0,\infty)} \frac{d\nu_\times(\beta)}{1 + y\beta}.}$$

定理 D｜离散 Riemann 谱恢复

由 $F = G'/G$ 的亚纯性，$\nu_\times$ 为纯点；其支撑与原子权重分别恢复 γ_n 与解析重数 m_n，并得到

$$z = \pm i\gamma_n.$$

定理 E｜源生成 Hilbert–Pólya 算子

定义

$$B_\times = M_\beta, \qquad H_\times = B_\times^{-1/2}.$$

则

$$\boxed{H_\times = H_\times^*, \qquad \sigma(H_\times) = \{\gamma_n\}.}$$

定理 F｜独立 Hilbert–Pólya 闭合 RH

定理 D–E 给出

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2} \pm i\gamma_n,}$$

故 RH 成立。

定理 G｜Riemann 规范谱见证相认

在上述终端形成后，标量完备见证给出

$$\boxed{(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}).}$$

定理 H｜除子保真 Ren–Riemann 相认

定义

$$\widetilde{H}_\times = \mathrm{Amp}_{M_\times}(H_\times),$$

则

$$\boxed{\widetilde{H}_\times \simeq H_{\mathrm{Ren}}.}$$

推论 I｜二阶见证继承

$$\boxed{(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \Rightarrow \mathcal{P}_2(H_\times, M_\times) = \mathcal{P}_2(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}).}$$

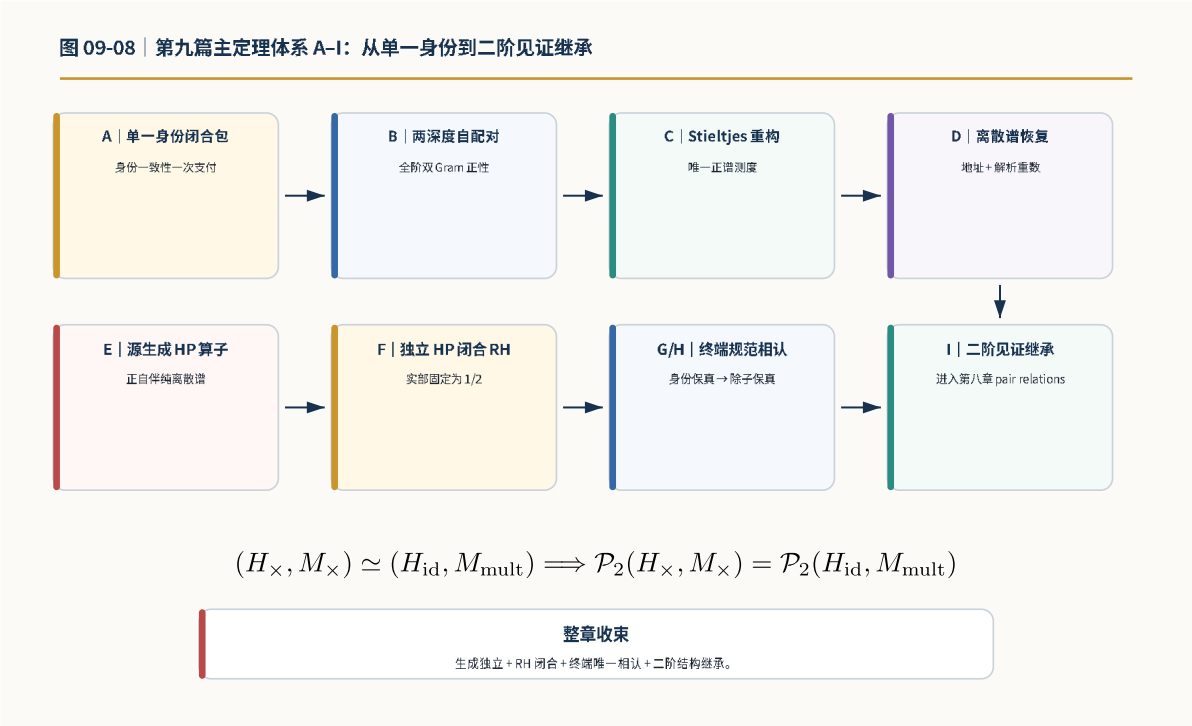


图 09-08　第九篇主定理体系。A 固定单一身份闭合包；B 给出两深度自配对与全阶双 Gram 正性；C – D 完成 Stieltjes 与离散谱恢复；E 生成正自伴 Hilbert–Pólya 算子；F 独立闭合 RH；G/H 在终端分别完成身份保真与除子保真相认；I 把已相认的一阶谱对象送入第八篇的二阶自身关系。整条链同时保持“生成独立”与“终端唯一可相认”。

28. 独立 Hilbert–Pólya 路线的闭合结构

本章的源生成 HP 路线分四层全部闭合。

第一层：身份闭合

$$\mathcal{R}_\times \to [\Omega]_{\mathrm{id}} \to X \to F \to \mathcal{L}_\times.$$

第二层 same-身份自配对：

$$\boxed{\mathcal{E}_{\times}^{[r]}(\Psi_i^{[r]},\Psi_j^{[r]})=\mu_{i+j+r},\qquad r=0,1.} \tag{28.1}$$

因此

$$\boxed{\mathsf{H}_N\succcurlyeq 0,\qquad \mathsf{H}_N^{(1)}\succcurlyeq 0\quad \forall N.} \tag{28.2}$$

第三层：Stieltjes / 谱重构

$$\boxed{(\mathsf{H}_N,\mathsf{H}_N^{(1)})_{N\geq 1}\to \nu_{\times}\to (H_{\times},M_{\times}).} \tag{28.3}$$

第四层：零点恢复 / RH

$$\boxed{(H_{\times},M_{\times})\to z=\pm i\gamma\to \rho=\frac{1}{2}\pm i\gamma\to \mathrm{RH}.} \tag{28.4}$$

有限维数值核对可以独立复算生成源矩、$N\leq 12$ 的 ordinary / shifted 正性、Gaussian 求积、预解式响应与低位谱锁定；全阶正性的证明来源是第 5 节的两深度身份自配对定理，而非有限数值外推。

规范谱见证只在 Hilbert–Pólya 终端形成以后进入：

$$(H_{\times},M_{\times})\simeq (H_{\mathrm{id}},M_{\mathrm{mult}}),\qquad \widetilde{H}_{\times}\simeq H_{\mathrm{Ren}}. \tag{28.5}$$

它回答“终端是谁”，不参与生成源内禀生成。

29. 结论：根乘法身份的源生成谱闭合

全章的核心结构是**单一身份闭合包（Unified Single-Identity Closure Package）**：移动视界、完成化、扫描、矩、ordinary / shifted Hankel 与有限窗口通过身份商和多重扫描组合律统一到生成源侧完整身份类 $\mathfrak{C}_{\times}$。

本章从唯一开放乘法关系

$$\boxed{\mathcal{R}_{\times}=\{(m,q,n):mq=n\}}$$

出发。后续没有加入第二个算术源，也没有用 Riemann 零点名单或规范谱对象替换生成源。

移动视界只改变 head/tail 的角色呈现：

$$[\Psi_r]=[\Omega]_{\mathrm{id}}.$$

完成化、平方变量化、对数响应与矩全部属于同一身份类：

$$X_r=X,\qquad G_r=G,\qquad F_r=F.$$

扫描只产生同一身份的多重显现：

$$\Psi_n=T_{\times}^{n}\Psi_0.$$

两个扫描显现之间的关系由总扫描深度控制：

$$T_{\times}^{i}T_{\times}^{j}=T_{\times}^{i+j}.$$

因此

$$\mathcal{E}_{\times}(\Psi_i, \Psi_j) = \mu_{i+j}$$

不是后来人为挑选的 Hankel 形式，而是这一身份组合律的坐标痕迹。

29.1 两类有限参数

视界参数 r 解决

$$\boxed{\text{有限呈现是否仍然是同一个完整身份.}}$$

其结论对每个 r 精确成立，不需要 $r \to \infty$。

谱分辨率参数 N 解决

$$\boxed{\text{有限谱截断何时看清同一个完整无限谱.}}$$

因此

$$\boxed{r\text{解决身份恒等；} \qquad N\text{解决谱分辨率。}} \tag{29.1}$$

29.2 独立 Hilbert–Pólya 闭合

根乘法身份自配对在两个关系深度上同时给出

$$\mathcal{E}_{\times}^{[r]}(\Psi_i^{[r]}, \Psi_j^{[r]}) = \mu_{i+j+r}, \qquad r = 0,1.$$

因此

$$\boxed{\mathsf{H}_N \succcurlyeq 0, \qquad \mathsf{H}_N^{(1)} \succcurlyeq 0 \quad \forall N.} \tag{29.2}$$

由 Stieltjes reconstruction 得到正谱测度，随后纯点 recovery、$B_{\times} \geq 0$、$H_{\times} = B_{\times}^{-1/2} = H_{\times}^{*}$ 以及

$$\rho = \frac{1}{2} \pm i\gamma_n$$

全部严格推出。故本章得到

$$\boxed{\text{RH.}} \tag{29.3}$$

有限 shifted 正性的数值核对检验全称结论的有限截面一致性。

29.3 自伴谱与横向自由度

在中心化 coordinate

$$z = d + i\gamma$$

中，RH 解析路线直接证明 $d = 0$。HP 路线则通过正 self-adjoint 谱参数的实性，把 squared spectral variable 的支撑压到

$$\beta > 0,$$

从而

$$z^2 = -\beta^{-1} < 0, \qquad z = \pm i\beta^{-1/2}.$$

两条路线使用不同语言，但关闭的是同一个横向自由度。

29.4 局部矩信息与全局解析响应

HP 路线不重复构造 ξ 的整函数延拓。$X(z) = \xi(1/2 + z)$ 已经由生成源完成化全局在场。有限谱截断读取的是 F 在 $y = 0$ 的 Taylor 解析芽：

$$F(y) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \mu_k y^k.$$

Stieltjes reconstruction 把这一局部全阶 germ 实现为正谱 measure；解析唯一性再把该 Stieltjes response 认回完整

$$F(y) = \frac{G'(y)}{G(y)}.$$

因此：

$$\boxed{\text{local 矩 germ} \to \text{Stieltjes 表示} \to \text{global 亚纯 response.}} \tag{29.4}$$

该链把局部全阶矩信息重新确定为全局亚纯响应。

29.5 身份保真与除子保真终端

源生成循环终端为

$$(H_\times, M_\times),$$

其中

$$H_\times e_n = \gamma_n e_n, \qquad M_\times e_n = m_n e_n.$$

Riemann 规范谱见证给出

$$\boxed{(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}).} \tag{29.5}$$

除子保真 amplification 为

$$\widetilde{H}_\times = \oplus_n \gamma_n I_{m_n},$$

并且

$$\boxed{\widetilde{H}_\times \simeq H_{\mathrm{Ren}}.} \tag{29.6}$$

这使身份地址、解析重数、循环表示与除子本征空间维数四个层级保持分离。

29.6 二阶自身关系的继承

一阶谱身份一经终端见证识别，所有 unitary-invariant second-order observables 自动一致：

$$\boxed{(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}) \Rightarrow \mathcal{P}_2(H_\times, M_\times) = \mathcal{P}_2(H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}).} \tag{29.7}$$

因此一阶源生成 HP 终端自然进入既有二阶谱理论；本章无需重复展开 GUE/CUE 的技术主体。

29.7 全章收束

本章严格逻辑为

开放乘法身份
⇓
无损身份商
⇓
同一身份的多重扫描
⇓
same-身份自配对 at$r = 0,1$
⇓
$\mathrm{H}_N \succcurlyeq 0, \quad \mathrm{H}_N^{(1)} \succcurlyeq 0 \quad \forall N$
⇓
Stieltjes 重构 + 源生成自伴 Hilbert–Pólya 谱
⇓
RH
⇓
规范谱见证 / second-order inheritance.

(29.8)

本轮修正进一步把身份总包贯彻到底：**ordinary 与 shifted 并不是“一个已闭合、一个还要额外证明正”的两种对象，而是同一个身份在两个关系深度上与自身相遇形成的两族 Gram 坐标。**因此此前单列的 shifted 正性条件被撤销；它只是 $r = 1$ Gram 恒等式的二次型写法。

真实身份只有一个； 扫描只扩大其显现； ordinary / shifted 只是同一身份自关系的两张坐标表。

(29.9)

附录 A｜核心符号与对象层级

符号	含义
$\mathcal{R}_\times$	开放乘法关系 $\{(m,q,n): mq = n\}$
$L_\times$	乘法总对数尺度 $\log(mq)$
R	因子相对角色坐标 $\log(q/m)$
$\kappa_z(L_\times, R)$	生成源角色核 $e^{-L_\times/2} e^{zR}$
Ω	完整生成源表示
$\Omega_r^{\mathrm{H}}, \Omega_r^{\mathrm{T}}$	移动视界的 head/tail 表示
$S(h,t) = h + t$	完整身份求和映射
$\mathcal{N}_{\mathrm{role}}$	角色零方向
$\mathcal{Q}_{\mathrm{id}}$	身份商
$\mathfrak{I}_\times = (\mathbb{N}_{>0}, \mu)$	全书唯一根乘法身份
$\mathfrak{C}_\times = [\Omega]_{\mathrm{id}}$	根乘法身份的生成源侧完整身份类
$X(z)$	中心化 completed 生成源 function
$G(y)$	squared-variable normalized 整函数

符号	含义
$F(y)$	对数导数响应
μ_k	生成源扫描矩指纹
$\mathcal{L}_\times$	矩/扫描泛函
$\mathcal{E}_\times$	根乘法身份自配对
$A_\times$	生成源扫描分析映射
$T_\times$	同一身份的扫描组合记号；只承担扫描索引与组合律，不单独承担正性条件
H_N	ordinary Hankel 有限关系表
$\mathsf{H}_N^{(1)}$	关系深度 +1 的 shifted Hankel 坐标表
$B_{\times,N}$	有限 Source–Krylov 谱截断
$\nu_\times$	全局有限正 Stieltjes 谱测度
$B_\times = M_\beta$	身份层有界正谱算子
$H_\times = B_\times^{-1/2}$	源生成身份保真 Hilbert–Pólya 算子
$M_\times$	源生成解析重数算子
$\widetilde{H}_\times$	除子保真放大
K_{Ren}	RH 前全坐标 Ren 算子 / 任毅飞算子
$H_{\mathrm{Ren}} = K_{\mathrm{Ren}}\|_{\mathrm{RH}}$	RH 后规范 Riemann 谱算子
H_{id}, M	规范身份保真 Riemann 谱对

附录 B｜生成独立性与对象边界

本章的源生成主链为

$$\boxed{\mathcal{R}_\times \to X \to F \to \mathcal{L}_\times \to \text{same-身份自配对 at} r=0{,}1 \to \begin{cases} \mathsf{H}_N \succcurlyeq 0, \\ \mathsf{H}_N^{(1)} \succcurlyeq 0, \end{cases} \quad \forall N \to \nu_\times \geq 0 \to (H_\times, M_\times) \to \mathrm{RH}.} \tag{B.1}$$

其中 shifted 二次型

$$\mathcal{L}_\times(\beta|p|^2)$$

不再作为独立条件；它由 $r=1$ 的生成源内禀 Gram 恒等式直接读成

$$\boxed{\mathcal{L}_\times(\beta|p|^2) = \left\| \sum_i c_i \Psi_i^{[1]} \right\|^2 \geq 0.} \tag{B.2}$$

独立性纪律保持不变：

1. $\{\gamma_n\}$ 不作为谱截断构造的输入；
2. K_{Ren} 不参与 HP 谱生成；
3. H_{Ren} 不参与 HP⇒RH implication；
4. Riemann 规范谱见证只在 Hilbert–Pólya 终端形成以后承担相认；
5. GUE/CUE 与二阶统计只在一阶谱身份固定以后进入；
6. 有限维数值 audit 与全阶定理的职责分离。

因此本章明确区分：

$$\boxed{\text{有限维数值正性} \neq \text{全阶定理的证明来源;}}$$

全称正性的证明来源是生成源内禀身份自配对；有限维数值结果只承担独立复验。

同时：

$$\boxed{\text{规范谱见证相认} \Rightarrow / \text{生成源内禀生成.}}$$

终端相认发生在证明之后，不参与上游构造。

后记

证明的高级形态，不是增加更多推理，

而是看见本来，使不必要的推理消失。

九章写到这里，书的数学主线已经结束。

第一章从开放乘法关系、互反角色与完整事件履历出发，给出本书的第一条 黎曼猜想闭合。

第二、三章把闭合后的零点进一步展开为间隔几何、边界解析芽、地址和解析重数。

第四章把直接闭合压缩成参数化七条件核，并以最小身份迁移完成广义黎曼猜想的 Dirichlet 情形证明。

第五章重新分层实际零点谱、有限事件提升谱和各类已有谱路线。

第六章构造任毅飞算子与完整 Ren–Riemann 谱对象。

第七章建立标量谱见证与规范谱身份相认。

第八章从一阶谱进入 Montgomery–GUE 二阶自身关系。

第九章重新回到根乘法身份，从生成源端独立构造 Hilbert–Pólya 自伴谱，并再次闭合 黎曼猜想。

从书的结构看，故事可以到这里结束。

但如果问这本书真正想留下什么，我不愿意只留下“黎曼猜想被证明了”这一句话。

因为证明是结果。

而这条路真正改变我的，是我开始重新理解：一个数学问题为什么会成为一个问题。

九章写完以后，我越来越确定：这本书真正想说的，并不是“还可以再增加多少推理”。

更重要的问题是：

> **当对象的身份重新变得清楚，哪些原本看似必须承担的推理，其实只是表示分裂以后产生的额外负担？**

所谓“看见本来”，不是绕开证明，更不是用直觉代替证明。

恰恰相反，它要求先把对象、角色、读数、表示和生成来源重新放回各自的位置。只有这样，我们才能知道：哪些证明义务是真正属于数学对象的，哪些只是因为我们把同一个对象拍成了许多张照片，又开始为照片之间的差异付债。

因此，我愿意用这句话作为全书最后的标题：

证明的高级形态，不是增加更多推理，

而是看见本来，使不必要的推理消失。



后记图 01　证明的高级形态：看见本来。 这幅图把后记的中心命题压缩为三个阶段：不断增加推理、重新定位问题真正要求的对象与身份、以及在结构固定以后让不必要的推理自行退场。它不是新的证明步骤，而是对全书证明观的收束性图景。

第一部　看见本来：问题如何被制造，又如何重新变得可见

一　最后，还是回到那个最小的问题

走过九章以后，书里已经有：

互反角色；

移动视界；

边界解析芽；

零点地址；

解析重数；

闭合核；

事件谱图；

任毅飞算子；

Stieltjes 见证；

Hilbert–Pólya；

GUE；

Gram 正性；

Source–Krylov 截断；

Fredholm 行列式。

这些对象已经足够多。

但它们都来自一个很小的问题：

为什么是$\frac{1}{2}$？

也许数学最迷人的地方，就在这里。

一个极小的问题，可以让人走得极远。

而走得足够远以后，又会发现真正重要的能力不是永远继续增加对象。

有时是回头。

看看最开始那个问题还在不在。

看看它究竟是什么时候变得困难。

看看我们是不是把同一个对象拍了很多张照片，然后开始为照片之间的差异付债。

如果回头以后，问题仍然存在，就回来继续证明。

如果回头以后，问题变了，就重新给它命名。

而如果最终，我们真的能够从两个完全不同的方向走回同一个结论，那么最值得珍惜的也许不是“赢了一个著名问题”。

而是我们多学会了一种看数学的方法。

所以，本书最后不想留下胜利宣言。

只留下一个邀请：

请把这条路重新走一遍。

如果它错了，让错误清楚地出现。

如果它对了，让结论不再依赖作者。

因为数学真正完成一个证明的时刻，从来不是作者写下最后一个句号。

而是这个证明可以离开作者，仍然站在那里。

二　一切其实开始于好奇心，而不是雄心

我最初并不是带着“解决黎曼猜想”的计划走进这个问题。

真正让我停下来的，只是一个非常小的疑问：

为什么偏偏是$\frac{1}{2}$？

数学史上有很多数字。

有些数字来自归一化。

有些来自维数。

有些来自对称中心。

有些来自平均值。

有些来自坐标选择。

在黎曼猜想里，1/2 看起来既简单又奇怪。

完成函数已经具有

$$s \leftrightarrow 1 - s$$

的互补结构。

零点层也具有

$$\rho \leftrightarrow 1 - \overline{\rho}$$

的临界线反射。

所以 1/2 明明一直在那里。

但标准数学同样清楚：

对称中心是 1/2

并不推出

$$\Re\rho = \frac{1}{2}$$

对每个零点成立。

正是这个显而易见的障碍，使问题变得真正有趣。

因为接下来可以问两个完全不同的问题：

第一个问题是：

怎样证明所有 $\Re\rho - \frac{1}{2}$ 都等于 0?

第二个问题是：

为什么 $\Re\rho - \frac{1}{2}$ 会成为一项独立的证明义务？

前一个问题向前。

后一个问题向后。

这本书正是在这两个方向之间不断往返：一面向前证明，一面回头检查问题是怎样被写成今天这个样子的。

三　对象化是数学最伟大的能力之一，也会留下证明债务

数学之所以强大，很大程度上因为它善于对象化。

我们把一段关系压成一个对象。

把对象放进集合。

把集合放进空间。

把函数变成零点。

把零点变成谱。

把谱变成测度。

把测度变成算子。

把局部数据压成不变量。

这些操作让数学可以无限向前。

但对象化还有另一面。

一个完整对象被拆开以后，局部部分会获得新的名字、新的地址、新的坐标。

一旦它能够被单独指认，我们很容易产生一种感觉：

> 它既然能够被单独写出来，就应该拥有自己的独立来源。

然而，这一步并不总是成立。

可寻址性增加，不等于身份信息增加。

表示变复杂，不等于对象换了身份。

一个坐标被单独抽出来，也不等于这个坐标已经获得了独立于完整对象的第二个生成机制。

我把这种需要被重新核对的证明义务称为“证明债务”。

所谓证明债务，并不是说证明可以少做。

恰恰相反。

它要求我们在每一项证明义务出现时多问一句：

> 这笔债，是对象本身欠下的，还是表示方式制造出来的？

如果是真债务，就必须还。

如果是等价变换，就不能把“换坐标”误写成“减少了证明信息”。

如果是有限切割产生的边界项，就应该把视界本身纳入问题。

如果是同一身份读数被重复注册，就必须先解释为什么它真的拥有第二个独立来源。

这一方法论不是 黎曼猜想 的证明。

但它改变了我寻找证明的方式。

四　我曾经一次次看到“最后一步”，后来才开始问它是不是同一步

面对 黎曼猜想，很容易反复产生一种感觉：

“已经非常接近了，只差最后一步。”

零点语言里，最后一步可能是：

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

Möbius 语言里，可能变成：

$$M(x) = O_\varepsilon(x^{1/2+\varepsilon}).$$

有限账本里，它可以变成某个临界双线性相关。

谱语言里，它又可能变成：

证明某个自伴算子的谱恰好等于 Riemann 零点谱.

每换一种语言，“最后一步”的外观都不同。

真正让我停下来的，是一个非常朴素的观察：

如果

$$A \Leftrightarrow B,$$

那么把 A 改写成 B，本身并没有减少证明信息。

如果再有

$$B \Leftrightarrow C,$$

也不能仅凭表示更漂亮就说离结论更近。

只有在某一步出现真正不能由旧表示回代得到的新事实时，证明债务才真的发生变化。

这也让我更加尊重“等价形式”本身的价值。

等价形式不是没有价值。

它们非常有价值。

它们改变视角，暴露结构，引入新工具，可能让真正的新事实第一次可见。

但它们的价值不能用“看起来更接近答案”来衡量。

应该问：

$$\boxed{\Delta\text{ProofInformation} > 0 \quad \text{发生在哪里？}}$$

五　最小充分回退：不是把数学撤回虚无，而是退到问题重新可见

还有一个词，我愿意留给读者：

$$\boxed{\text{最小充分回退.}}$$

它不是让每个数学问题都退到最底层哲学。

那样没有操作性。

真正的含义是：

> 退到足以暴露困难来源的位置，然后停止。

如果一个问题在函数层已经清楚，不需要退到乘法。

如果在乘法层已经清楚，不需要退到更深的生成哲学。

对 黎曼猜想 而言，真正有效的回退最终停在：

$$\text{零点} \leftarrow \xi \leftarrow \zeta \leftarrow \text{Euler 乘积} \leftarrow \text{自然数乘法身份}.$$

然后重新向前。

这就是为什么 GHT 在这本书中最终退到了背景。

它帮助提出：

“对象从哪里来？”

但一旦数学对象已经重新找到，本书就回到标准数学语言。

从根乘法身份开始，向前建立关系、表示、事件、测度和算子。

发现可以来自任何地方。

证明必须回到数学。

六　过去一百六十多年不是弯路，而是一座巨大的工具资产库

我曾经用一句很容易被误解的话描述这种感受：

数学走了很远，身份却没有移动。

如果把这句话理解成“过去的数学没有取得真正进展”，那是完全错误的。

Riemann 之后的一百六十多年，数学获得了极其庞大的新信息。

我们知道更多零点在哪里。

知道更强的无零区域。

知道更精细的素数误差。

知道 zeta 与 Möbius、von Mangoldt、显式公式之间的关系。

知道函数空间、正性、逼近、谱、随机矩阵能够如何重新表达 黎曼猜想。

知道零点之间的二点统计呈现怎样惊人的结构。

知道越来越多的 L-函数家族具有怎样的普适性。

知道计算能够把有限验证推进到怎样的高度。

这些都是真正的新数学。

因此更准确的账本应该是：

$$\begin{aligned}\Delta\text{Representation} &\gg 0,\\ \Delta\text{AnalyticInformation} &> 0,\\ \Delta\text{SpectralInformation} &> 0,\\ \Delta\text{StatisticalInformation} &> 0.\end{aligned}$$

本书追问的，只是其中另一项：

$$\Delta\text{IdentityInformation}$$

究竟在哪里发生。

这不是否定表示。

而是给表示重新分型。

真正成熟的理论，不只应该知道自己得到了多少新信息，也应该知道这些信息属于哪一层。

第二部　当身份重新显现：证明如何从解释进入数学

七　身份梳理最终没有停在解释层，而进入了第一条证明

如果本书只停在“证明债务”的诊断上，它仍然只是一种方法论。

真正重要的变化，是身份梳理最终被压进了严格数学对象。

第一章不说“因为乘法自对偶，所以零点都在临界线”。

这样的推理并不成立。

第一章真正建立的是：

$$\boxed{\text{根乘法身份} \to \text{互反角色} \to \text{完整事件} \to \text{角色保真} \to \text{终端固定读数.}}$$

在这条链里：

$$\text{身份} \neq \text{角色} \neq \text{角色读数.}$$

源端的 $1/2$ 也不是一个被数值搬运到零点实部的常数。

闭合发生在同一完整事件的互反角色结构中。

当源端完整事件已经处于互反固定角色，而终端解析表示仍保持同一互反角色时，终端对象只能落在解析互反对合的固定集合。

对于 Riemann 零点，这个固定集合就是：

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

这一步非常重要。

它意味着最早的“身份问题”终于不再只是解释，而是承担了证明责任。

八　谱路线的意义也发生了变化：从“可能的解释”变成第二条独立证明

面对 Hilbert–Pólya 路线，我一直保留一个最基本的警惕。

原因很简单。

如果先知道 Riemann 零点

$$\gamma_n$$

再定义

$$He_n = \gamma_n e_n,$$

当然可以得到一个自伴对角算子。

但这并没有解释零点为什么来自这个算子。

它只是把答案重新包装成谱。

真正困难的从来不是：

能不能写一个谱算子？

而是：

> 这个谱能不能从独立的算术源生成？

以及：

> 为什么它必然与 Riemann 零点谱相同？

第六章与第七章解决的是“规范 Riemann 谱对象”和“如何认出同一个谱”。

第九章则做另一件事。

它不从零点列表出发。

不从 K_{Ren} 出发。

不从 H_{Ren} 出发。

不从第七章的见证测度出发。

它重新从：

$$\mathfrak{I}_{\times} = (\mathbb{N}_{>0}, \mu)$$

开始。

通过单一身份闭合包、两深度自配对、Gram 正性、Stieltjes 重构、纯点测度和谱定理，生成：

$$H_{\times} = H_{\times}^{*}.$$

然后从它的谱恢复：

$$\rho = \frac{1}{2} \pm i\gamma_n.$$

这时 Hilbert–Pólya 不再只是一个“如果存在这样的算子，那么 黎曼猜想 就成立”的设想。

在本书内部，它成为：

> 从乘法生成源到自伴谱，再到 黎曼猜想 的独立闭合链。

只有在这条链完成以后，第七章的规范谱见证才进入，告诉我们：

$$(H_\times, M_\times) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}).$$

也就是说，第二条路线先生成，再相认。

这一区分，是我认为全书最重要的结构成果之一。

九　GUE 也因此回到了它真正的位置

当一阶谱身份已经固定，GUE 才真正进入。

这件事看似只是书的章节安排，实际上非常重要。

长期以来，人们很容易把下面几件事混在一起：

- 黎曼猜想；
- Hilbert–Pólya；
- 随机矩阵；
- GUE；
- 量子混沌。

它们彼此有关，但不是同一命题。

黎曼猜想 说的是横向位置：

$$\Re\rho = \frac{1}{2}.$$

Hilbert–Pólya 说的是纵向频率能否成为自伴谱。

GUE 说的是这一阶谱与自身形成二点、高阶关系以后呈现怎样的统计组织。

因此：

$$\boxed{\text{自伴性} \not\Rightarrow \text{GUE}.}$$

同样：

$$\boxed{\text{GUE 数值符合} \not\Rightarrow \text{黎曼猜想证明}.}$$

第八章把这些层级重新分开。

而一旦第七、九章确定：

$$(H_{\times}, M_{\times}) \simeq (H_{\mathrm{id}}, M_{\mathrm{mult}}),$$

二阶酉不变结构就可以自动继承。

于是 GUE 不再承担它不应该承担的证明责任。

它成为闭合后 Riemann 谱自身关系的自然下游。

第三部　证明之后：公共检验、历史与继续生长的数学

十　“我们证明了 黎曼猜想”与“数学共同体已经接受 黎曼猜想”是两句话

写到这里，需要留下最重要的一条边界。

本书的数学结论是明确的。

我在正文中给出的结论是：

第一章完成了 黎曼猜想 的直接闭合。

第九章又给出了独立的 Hilbert–Pólya 源生成谱证明。

因此，在本书内部：

黎曼猜想

不是一个仍被保留为假设的命题。

这是书中定理链的结论。

但数学是一种公共理性。

我写下一个证明，与数学共同体完成认证，不是同一句话。

真正重要的结果应当能够：

- 被别人重新定义；
- 被别人逐步推导；
- 被别人发现错误；
- 被别人提出反例；
- 被别人用另一种语言重写；

- 被形式系统或独立程序重放其中可以形式化的部分；
- 最终脱离作者本人的解释而站立。

我不希望任何读者因为这本书的语气而相信 黎曼猜想已被证明。

也不希望你因为作者是不是一个熟悉的名字，就预先决定它一定成立或一定不成立。

最公平的方式仍然只有一个：

请检查证明。

如果某一步错了，请指出哪一步。

如果某个对象定义循环，请把循环画出来。

如果某个“独立生成”事实上借用了 Riemann 谱，请指出它具体借用了什么。

如果某个等价被错误升级成了蕴含，请给出反例。

如果一个局部结论不足以支撑全称命题，请指出量词缺口。

这种批评不是对本书的敌意。

这正是任何数学证明都必须接受的检验。

十一　一本书最好的结局，不是要求相信，而是开始被真正检验

写到这里，我更在意一件事：

如何让这些想法被数学共同体看见。

现在写到这里，这个愿望仍然没有改变。

但它已经更具体。

我不需要别人因为“这是千禧难题”而多看一眼。

也不需要别人因为“作者坚持了很久”而降低标准。

我真正希望的是：

有人愿意把第一章当作一个陌生证明来读。

有人愿意只攻击 K1–K7 中最脆弱的一条。

也可以把第九章的生成链重新形式化，逐项检查每一个前提。

有人愿意寻找一个最小反例。

有人愿意指出一个类型错误。

有人愿意证明某个我写得很复杂的部分其实可以用一个经典定理一句话替代。

有人愿意在不同意结论的情况下，仍然准确指出不同意发生在哪里。

数学不是作者与读者之间的信任关系。

它是一种可以共同检查的结构。

这是写完这本书以后，我最愿意留下的一句话。

十二　证明之后，数学仍然向前

如果这本书的两条证明经受住独立检查，故事也不会因此结束。

对读者而言，最自然的下一件事不是接受结论，而是继续打开它。

可以逐章检查每个定理究竟依赖什么，看看跨章引用是否只使用了已经建立的前提。

可以把第一章和第九章分开阅读，核对两条 黎曼猜想证明是否真正保持了各自声称的独立性。

可以把适合形式化的部分交给计算机：矩、有限截断、Fredholm 恒等式、谱测度相认，以及所有可以机械重放的代数与解析步骤。

也可以把书中的语言重新翻译成更熟悉的经典解析数论、算子论或谱理论语言。如果一种新的表述能够把同一个证明写得更短、更透明，那是数学本身的收益。

第四章已经把身份迁移推进到 Dirichlet 广义黎曼猜想；第七、八章则把问题带到谱见证与二阶统计。由此自然会出现新的问题：哪些更一般的完成 L-函数仍然保有同样的身份、互反和完成结构？哪些对象只是形式相似，却缺少决定性的同一性条件？

而在 黎曼猜想本身之后，纵向零点谱、间隔几何、重数、GUE/CUE、有限尺度算术修正以及量子动力学解释，都仍然是独立而丰富的数学世界。

所以“证明完成”从来不意味着“数学结束”。

它只是把一道长期挡在门口的问题推开，让门后的空间变得更清楚。

十三　感谢前人，不是礼貌，而是对数学事实的尊重

写一本声称证明 黎曼猜想 的书，很容易在叙述上产生一种错觉：

仿佛作者站在终点，前人都只是没有走到那里的人。

我不愿意这样理解这段历史。

Riemann 没有给出 黎曼猜想 的证明，但他创造了我们今天仍在使用的整个问题空间。

Hadamard 与 de la Vallée Poussin 没有解决 黎曼猜想，却证明了素数定理，把 Riemann 方法第一次变成决定性的算术成果。

Hardy、Selberg、Levinson、Conrey 没有完成“百分之百”，却把临界线从猜想中心变成严格可触及的数学对象。

Turing、Odlyzko 和无数计算工作没有把有限验证变成无穷证明，却让零点世界拥有前所未有的可见性。

Weil、Nyman、Beurling、Li 等人没有让等价判据自动解决 黎曼猜想，却展示了同一问题可以穿越多少不同的数学结构。

Hilbert–Pólya、de Branges、Connes、Berry–Keating、Suzuki 等谱方向没有在既有文献中形成被共同体接受的 黎曼猜想证明，却让“Riemann 零点是不是谱”成为一个极其深刻而持续生长的问题。

Montgomery、Dyson、Odlyzko、Katz、Sarnak 等人让我们看见：即使知道所有零点都在一条线上，真正的零点世界仍远比“一条线”丰富。

因此，即使本书的核心结论最终成立，也不能把过去一百六十多年压缩成“他们没有想到身份”。

那不是数学史。

更接近事实的是：

> **正因为前人把每一条道路走得如此深，我们今天才有足够多的结构去重新看见同一个对象。**

十四　我越来越相信：好奇心比“解决大问题”更值得保护

一个著名问题有很强的引力。

它会让人不自觉地想：

“怎样才能解掉它？”

但走到这里，我越来越觉得，更值得保护的是另一种东西：

好奇心。

好奇心不关心一个问题值不值得一百万美元。

它也不关心一个问题是否有足够高的历史声望。

它只是会在某个地方停下来，问一句：

为什么？

为什么是这个对象？

为什么是这个定义？

为什么这一项要单独证明？

为什么这里突然多了一个自由度？

为什么一个整体对象被拆成局部以后，局部就获得了独立身份？

为什么我们每换一种等价形式，都觉得自己更接近答案？

为什么一个问题做了一百多年以后，我们只能继续向前，而不能回头检查它是怎样形成的？

这些问题未必都产生定理。

但它们决定我们去哪里寻找定理。

如果这本书最终有任何超出 黎曼猜想本身的方法论价值，我希望它来自这种允许自己回头的好奇心。

十五　私人好奇心与公共数学

数学常常从非常私人的地方开始。

一个人对一个数字感到奇怪。

对一个公式感到不安。

对一个被所有人使用的对象忽然多问一句：

“它为什么是这样？”

这样的起点没有任何公共权威。

它甚至可能只是误解。

但数学有一种非常珍贵的机制：私人好奇心可以被翻译成公共对象。

当一个想法被写成定义、引理、定理和可复核的推导以后，它就开始离开作者。

别人不需要经历作者的经历。

不需要接受作者的方法论。

不需要分享作者最初的直觉。

只需要检查那些写在纸面上的关系。

这是我最喜欢数学的地方之一。

它允许一个人非常孤独地开始。

也要求一个人最终走出自己的孤独。

Riemann 在 1859 年写下那个猜想的时候，不可能知道此后一百六十多年会有多少人沿着它进入完全不同的数学世界。

Hardy 不会知道 Montgomery。

Montgomery 最初也不是为了随机矩阵而得到 pair correlation。

Dyson 的物理直觉与数论在一个意外的地方相遇。

Hilbert–Pólya 的愿望被几代人在不同语言里重新表达。

我们今天使用的许多工具，都是不同年代的人在彼此并不知道最终会在哪里会合的情况下留下的。

所以，如果这本书真的完成了它声称完成的事情，它也仍然只是这条长河里的一个节点。

它用了前人的语言。

继承前人的定理。

借用了前人打开的视野。

然后从一个新的问题角度，把这些东西重新组织在一起。

如果它是错的，数学会把它留下的错误分离出来。

如果它是对的，数学也会逐渐把其中真正有效的部分从作者的私人语言中剥离出来，变成大家都能使用的结构。

这两种结果都比“相信”更好。

因此，写到最后，我愿意把这本书最初和最终的两个词放在一起：

好奇心可以是私人的，证明必须是公共的。

而在这两者之间，是人与人漫长的连接。

不同年代的人。

不同方法的人。

不同判断的人。

甚至彼此反对的人。

都可能因为同一个问题而进入同一段数学历史。

孤独可以是真实的。

联系也同样真实。



后记图 02　对象、履历与下一次心跳。 一个对象被点亮，随后退入背景、成为履历，又在新的关系中重新进入前景；作者、读者与后来者也处在同样的传递链中。命题可以在一页结束，但对象的履历、公共复核与下一次指向仍会继续。

感谢

写到这里，书里的数学已经结束。

感谢不属于证明，也不需要承担任何定理的责任。但一本书能够真正写完，从来不只靠坐在桌前的那一个人。很多支持没有进入公式，没有出现在脚注里，也不会留下可以引用的编号；可如果没有它们，这些页也不会以今天的样子来到读者面前。

感谢我的父母和家人

许多最重要的支持，并不总是以语言出现。它可能只是长久的陪伴、理解、牵挂，和在我看不见的时候始终存在的托举。

感谢 Matrix 的小伙伴

你们是最早看着这本书一点点长出来的人。

每当又写出新的内容，我常常会第一时间发给你们看。有时候，那已经是连续写到深夜，甚至通宵之后，但在准备休息之前，我还是会发一张截图给你们，告诉你们：今天又往前走了一点。

很多时候，你们未必参与具体的数学推导，但你们一直在。

这种陪伴让我在漫长的写作里没有那么孤独，也让我知道，当一个想法终于被写下来、一个问题终于向前推进时，总有人愿意第一时间看见它。

正是这种很日常、很安静的陪伴，支撑着我一路走到了这里，也支撑着我最终写完了这本书。

感谢一路相遇的人

也感谢每一个认识我的人，和每一个我有幸认识的人。

有些人陪伴很久，有些人只是短暂经过；有些关系清晰而深刻，有些甚至只留下一个很小的片段。

可一个人的生活，本来就不是只由那些“重要时刻”组成的。

有时是一句话。

有时是一顿饭。

有时是一次争论。

有时是在我兴奋地讲一个想法时，你愿意多听几分钟。

有时是在我沉默的时候，你没有急着追问。

有时只是很多年以后再回头，才忽然明白，当时一个很普通的善意，原来陪我走了那么远。

这些东西都没有必要被写进数学。

但它们确实写进了一个人。

我也因此越来越明白：我们成为今天的自己，并不是因为独自保存了多少东西，而是因为曾经有人在不同的时刻，给过理解、耐心、帮助、质疑、宽容和温度。

有些名字不会出现在这里。

不是因为不重要，而是因为真正重要的部分，往往不需要被列成名单。

如果你曾经在我的生命里出现过，无论长短，无论后来我们走向哪里，我都想在这本书结束的地方，对你说一声：

谢谢。

感谢那些没有要求我成为别人的人

还有一种感谢，我一直想留到最后。

感谢那些允许我按照自己的速度理解世界的人。

没有催促我必须走一条更标准的路，没有因为一个想法听起来太远就立刻把它关掉，也没有因为我反复改变表达方式而失去耐心。

很多事情，只有在不被急着定义的时候，才有机会慢慢长出自己的形状。

这本书当然有它的数学结论，但对我个人而言，更珍贵的是：在漫长的书写里，我仍然能够保留最初那一点好奇，没有把它换成一种更方便解释给别人听的姿态。

能够做到这一点，并不是我一个人的功劳。

所以，也谢谢那些给过我自由的人。

最后，感谢读到这里的你

你也许从第一页读到了这里，也许只是偶然翻到最后。

你可能熟悉数论、复分析和谱理论，也可能只是因为“黎曼猜想”这几个字停下来看看。

不管是哪一种，我都感谢你把自己的时间留给了这本书。

一本书被写完，只是作者这一边的结束。

当它真正被另一个人打开以后，文字才开始拥有作者无法控制的命运。你会同意其中一些东西，也会怀疑一些东西；你可能在某一页停很久，也可能很快翻过去。你甚至可能多年以后，只记得一个公式、一句话，或者某个完全出乎我意料的细节。

都很好。

因为从这一刻起，这本书已经不再只属于写下它的人。

我希望你带走的，不是对作者的相信。

也不一定是某种结论。

如果一定要留下什么，我更希望那是一点愿意继续追问的心情：当一个问题看起来已经被说得足够复杂时，是否还可以回去看看，它最初究竟是什么；当我们以为已经走得很远时，是否还有机会重新看见那些一直都在的东西。

至于答案，它终究应该留给数学，也留给时间。

感谢我的父母和家人。

感谢 Matrix 的小伙伴

感谢所有曾经出现、正在出现、以后还会出现的人。

也感谢此刻读到这里的你。

书写到这里，公式终于安静下来。

愿我们都保留自己的不可替代，也记得那些曾经托住自己的手。

然后继续生活。

继续相遇。

继续好奇。

没有零点。

只有心跳。

参考文献

一　Riemann zeta 函数、素数定理与 RH 的历史基础

[1] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 2 vols., Lausanne, 1748.

[2] B. Riemann, “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse,” *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1859, 671–680.

[3] J. Hadamard, “Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques,” *Bulletin de la Société Mathématique de France* **24** (1896), 199–220. DOI: 10.24033/bsmf.545.

[4] C.-J. de la Vallée Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Bruxelles, 1896–1897.

[5] E. C. Titchmarsh, revised by D. R. Heath-Brown, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., Clarendon Press / Oxford University Press, Oxford, 1986.

[6] H. M. Edwards, *Riemann’s Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974; Dover reprint, 2001.

[7] E. Bombieri, “The Riemann Hypothesis,” in J. Carlson, A. Jaffe, and A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, Clay Mathematics Institute / American Mathematical Society, 2006, 107–124.

[8] J. B. Conrey, “The Riemann Hypothesis,” *Notices of the American Mathematical Society* **50** (2003), no. 3, 341–353.

[9] G. H. Hardy, “Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann,” *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris* **158** (1914), 1012–1014.

[10] N. Levinson, “At Least One-Third of Zeros of Riemann’s Zeta-Function Are on $\sigma = 1/2$,” *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **71** (1974), no. 4, 1013–1015. DOI: 10.1073/pnas.71.4.1013.

[11] J. B. Conrey, “More than Two Fifths of the Zeros of the Riemann Zeta Function Are on the Critical Line,” *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **399** (1989), 1–26. DOI: 10.1515/crll.1989.399.1.

[12] A. M. Turing, “Some Calculations of Riemann’s Zeta-Function,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 3, **3** (1953), 99–117.

[13] A. R. Booker, “Turing and the Riemann Hypothesis,” *Notices of the American Mathematical Society* **53** (2006).

[14] A. M. Odlyzko, “On the Distribution of Spacings Between Zeros of the Zeta Function,” *Mathematics of Computation* **48** (1987), no. 177, 273–308. DOI: 10.1090/S0025-5718-1987-0866115-0.

二　等价判据、正性、函数空间与矩问题

[15] A. Weil, “Sur les ‘formules explicites’ de la théorie des nombres premiers,” *Communications du Séminaire Mathématique de l’Université de Lund*, Tome supplémentaire, 1952, 252–265.

[16] B. Nyman, *On the One-Dimensional Translation Group and Semi-Group in Certain Function Spaces*, Ph.D. thesis, University of Uppsala, 1950.

[17] A. Beurling, “A Closure Problem Related to the Riemann Zeta-Function,” *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **41** (1955), no. 5, 312–314. DOI: 10.1073/pnas.41.5.312.

[18] X.-J. Li, “The Positivity of a Sequence of Numbers and the Riemann Hypothesis,” *Journal of Number Theory* **65** (1997), no. 2, 325–333. DOI: 10.1006/jnth.1997.2137.

[19] L. de Branges, “The Riemann Hypothesis for Hilbert Spaces of Entire Functions,” *Bulletin of the American Mathematical Society* **15** (1986), no. 1, 1–17. DOI: 10.1090/S0273-0979-1986-15429-7.

[20] W. F. Donoghue, Jr., *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[21] N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1965.

[22] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1943.

[23] B. Ya. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, revised ed., Translations of Mathematical Monographs, Vol. 5, American Mathematical Society, Providence, RI, 1980.

[24] R. P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.

[25] N. Aronszajn, "Theory of Reproducing Kernels," *Transactions of the American Mathematical Society* **68** (1950), 337–404.

[26] D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton Mathematical Series, Vol. 6, Princeton University Press, Princeton, 1941.

[27] B. Hatinoğlu, "Uniqueness Theorems for Meromorphic Inner Functions and Canonical Systems," *Canadian Mathematical Bulletin* **68** (2025), 124–140.

[28] Á. Baricz, P. Kumar, and S. Singh, "Asymptotic Expansions for the Radii of Starlikeness of Normalized q-Bessel Functions," *Results in Mathematics* **79** (2024), 248.

三　Hilbert–Pólya、算子理论与 Riemann 谱路线

[29] G. Pólya, letter to A. M. Odlyzko, 3 January 1982, reproduced in A. M. Odlyzko, "Correspondence about the Hilbert–Pólya Conjecture," University of Minnesota online archive.

[30] M. V. Berry and J. P. Keating, "The Riemann Zeros and Eigenvalue Asymptotics," *SIAM Review* **41** (1999), no. 2, 236–266. DOI: 10.1137/S0036144598347497.

[31] M. V. Berry and J. P. Keating, "$H = xp$ and the Riemann Zeros," in I. V. Lerner, J. P. Keating, and D. E. Khmelnitskii (eds.), *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, Kluwer/Plenum, New York, 1999, 355–367.

[32] A. Connes, "Trace Formula in Noncommutative Geometry and the Zeros of the Riemann Zeta Function," *Selecta Mathematica* **5** (1999), 29–106. DOI: 10.1007/s000290050042.

[33] M. Suzuki, "A Canonical System of Differential Equations Arising from the Riemann Zeta-Function," arXiv:1204.1827, 2012.

[34] M. Suzuki, "Aspects of the Screw Function Corresponding to the Riemann Zeta-Function," *Journal of the London Mathematical Society* **108** (2023), 1448–1487.

[35] M. Suzuki, "On the Hilbert Space Derived from the Weil Distribution," *Canadian Journal of Mathematics*, published online 3 November 2025, 1–24. DOI: 10.4153/S0008414X25101739.

[36] A. Connes and C. Consani, "The Scaling Hamiltonian," arXiv:1910.14368.

[37] A. Connes and C. Consani, "Spectral Triples and Zeta-Cycles," *L'Enseignement Mathématique* **69** (2023), 93–148; arXiv:2106.01715.

[38] A. Connes, C. Consani, and H. Moscovici, "Zeta Spectral Triples," arXiv:2511.22755, 2025.

[39] A. Connes and W. D. van Suijlekom, "Quadratic Forms, Real Zeros and Echoes of the Spectral Action," arXiv:2511.23257, 2025.

[40] M. Suzuki, "Weil's Quadratic Form via the Screw Function," arXiv:2606.09096, 2026.

[41] M. Suzuki, "Spectral Convergence Associated with Weil's Quadratic Form," arXiv:2610.32704, 2026.

[42] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972.

[43] B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, 2nd ed., Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 120, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. DOI: 10.1090/surv/120.

[44] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1990.

四　Montgomery–GUE、随机矩阵与二阶谱统计

[45] H. L. Montgomery, “The Pair Correlation of Zeros of the Zeta Function,” in *Analytic Number Theory* (St. Louis, 1972), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 24, American Mathematical Society, Providence, RI, 1973, 181–193.

[46] F. J. Dyson, “Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I,” *Journal of Mathematical Physics* **3** (1962), 140–156.

[47] D. A. Goldston and H. L. Montgomery, “Pair Correlation of Zeros and Primes in Short Intervals,” in *Analytic Number Theory and Diophantine Problems*, Progress in Mathematics, Vol. 70, Birkhäuser, Boston, 1987, 183–203.

[48] Z. Rudnick and P. Sarnak, “Zeros of Principal L-Functions and Random Matrix Theory,” *Duke Mathematical Journal* **81** (1996), no. 2, 269–322. DOI: 10.1215/S0012-7094-96-08115-6.

[49] E. B. Bogomolny and J. P. Keating, “Random Matrix Theory and the Riemann Zeros. I. Three- and Four-Point Correlations,” *Nonlinearity* **8** (1995), 1115–1131. DOI: 10.1088/0951-7715/8/6/013.

[50] E. B. Bogomolny and J. P. Keating, “Random Matrix Theory and the Riemann Zeros II: n-Point Correlations,” *Nonlinearity* **9** (1996), 911–935. DOI: 10.1088/0951-7715/9/4/006.

[51] N. M. Katz and P. Sarnak, *Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 45, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[52] J. B. Conrey and N. C. Snaith, “Correlations of Eigenvalues and Riemann Zeros,” *Communications in Number Theory and Physics* **2** (2008), no. 3, 477–536. DOI: 10.4310/CNTP.2008.v2.n3.a1.

[53] B. Conrey and J. P. Keating, “Averages of Ratios of the Riemann Zeta-Function and Correlations of Divisor Sums,” arXiv:1611.09198, 2016.

[54] J. P. Keating and Z. Rudnick, “The Variance of the Number of Prime Polynomials in Short Intervals and in Residue Classes,” *International Mathematics Research Notices* **2014** (2014), no. 1, 259–288. DOI: 10.1093/imrn/rns220.

[55] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd ed., Elsevier / Academic Press, Amsterdam, 2004.

[56] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, London Mathematical Society Monographs, Princeton University Press, Princeton, 2010.

[57] E. P. Wigner, “On the Statistical Distribution of the Widths and Spacings of Nuclear Resonance Levels,” *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **47** (1951), no. 4, 790–798. DOI: 10.1017/S0305004100027237.

[58] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, “Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws,” *Physical Review Letters* **52** (1984), no. 1, 1–4. DOI: 10.1103/PhysRevLett.52.1.

[59] S. M. Nishigaki, “Distributions of Consecutive Level Spacings of Gaussian Unitary Ensemble and Their Ratio: Ab Initio Derivation,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2024** (2024), no. 8. DOI: 10.1093/ptep/ptae120; arXiv:2407.15704.

[60] S. M. Nishigaki, “Distributions of Consecutive Level Spacings of Circular Unitary Ensemble and Their Ratio: Finite-Size Corrections and Riemann ζ Zeros,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2026** (2026), no. 2, 023A02. DOI: 10.1093/ptep/ptag006.

五　调和分析、概率结构与基础工具

[61] S. Bochner, *Lectures on Fourier Integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1959.

[62] N. Wiener, “Generalized Harmonic Analysis,” *Acta Mathematica* **55** (1930), 117–258.

[63] A. Khintchine, “Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse,” *Mathematische Annalen* **109** (1934), 604–615.

[64] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1976.

[65] NIST Digital Library of Mathematical Functions, Chapter 25, “Riemann Zeta Function.”

六　作者著作

[66] 任毅飞，《数学的地基：GHT 生成履历理论概论》，Zenodo，2026. DOI: 10.5281/zenodo.23662772.

七　问题现状与历史资料

[67] Clay Mathematics Institute, “Riemann Hypothesis,” *Millennium Prize Problems*, current problem-status page, accessed November 2026.

[68] A. Weil, “Numbers of Solutions of Equations in Finite Fields,” *Bulletin of the American Mathematical Society* **55** (1949), 497–508.

[69] P. Deligne, “La conjecture de Weil. I,” *Publications Mathématiques de l’IHÉS* **43** (1974), 273–307.

[70] H. Davenport, revised by H. L. Montgomery, *Multiplicative Number Theory*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 74, Springer-Verlag, New York, 2000.

[71] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[72] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1997.

黎曼猜想：证明、谱与它背后的数学世界

——从乘法身份、广义黎曼猜想到 Hilbert–Pólya 与 GUE



内容提要

以乘法身份为核心的证明路线：
本书提出并系统展开一条以乘法身份为中心的黎曼猜想证明路线，从源头结构出发建立通向临界线的完整链条。

广义黎曼猜想的证明：
给出广义黎曼猜想的证明，作为一种身份传递的路线，将乘法身份的结构性结论推广到更广泛的 L 函数族。

谱的视角：Ren 算子、黎曼谱见证、Hilbert–Pólya 与 GUE：
构造 Ren 算子并建立其可逆恢复机制，引入黎曼谱见证，连接 Hilbert–Pólya 思想，并揭示与广义西群（GUE）的深刻联系。

零点、谱、对偶关系与结构闭合的整体图景：
给出一个贯通全文的数学图景，刻画零点、谱、对偶关系与结构闭合之间的内在关联，展示从身份、表示到谱、恢复与见证的统一结构。

作者：任毅飞

作者身份：独立研究者